

DIE BESTIMMUNG ÖRTLICHER UND MITTLERER WÄRMEÜBERGANGSZAHLEN IN ROHREN BEI HOHEN WÄRMESTROMDICHTEN*†

W. HUFSCHMIDT, E. BURCK und W. RIEBOLD

Abteilung für Wärmeübertragung, Hauptabteilung Engineering

Gemeinsames Euratom-Forschungszentrum, Ispra, Italien

(Eingegangen 28 Juli 1965, in revidierter Auflage 16 Dezember 1965)

Zusammenfassung—Bei der Bestimmung örtlicher und mittlerer Wärmeübergangszahlen von strömenden Medien in oder an direkt elektrisch beheizten Rohren werden üblicherweise zwei Messverfahren benutzt, um die nicht messbare Temperatur T_w der gekühlten Oberfläche zu ermitteln: Entweder wird die Temperatur T_{is} der ungekühlten Rohrwandseite mit Thermoelementen gemessen oder die mittlere Wandtemperatur T_m wird aus dem gemessenen elektrischen Rohrwiderstand ermittelt. Es wird gezeigt, dass das zweite Verfahren aufgrund des Messprinzips zu Fehlern führen kann, wenn man örtliche Messungen durchführen will. Die Berechnung der Temperaturdifferenzen $(T_{is} - T_w)$ bzw. $(T_m - T_w)$ erfolgte mithilfe der Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Wärmequellen und temperaturabhängigen Stoffwerten des Wandmaterials. Dabei zeigte sich, dass im technisch interessierenden Bereich eine vereinfachte Lösung, die von konstanten, mittleren Stoffwerten ausgeht, nur geringfügige Abweichungen von der „exakten“ Lösung (die einen Digitalrechner IBM 7090 erfordert) liefert.

Die Brauchbarkeit des Messverfahrens mit Thermoelementen (T_{is}) und des Auswertungsverfahrens wird anhand von Messungen an wasserdurchströmten Rohren verschiedener Geometrien und Wandmaterialien bis zu Wärmestromdichten von 450 W/cm^2 nachgewiesen. Im untersuchten Bereich ($20000 < Re < 640000$, $2 < Pr < 5,5$; $1 < Pr/Pr_w < 5$) konnte der Einfluss der temperaturabhängigen Stoffwerte des Wassers und der Wärmestromdichte auf die Nusseltsche Zahl durch den Faktor $(Pr/Pr_w)^{0,11}$ wiedergegeben werden.

FORMELZEICHEN

A ,	Rohrquerschnitt [m^2];	Q_m ,	Massenstrom des Kühlmittels [kg/s];
$E(r)$, E_0 ,	elektrische Feldstärke nach Gl. (39) und (40) [V];	R_x , R_N , R_a ,	Widerstände der Thomson-Brücke (Abb. 3) [Ω];
I ,	Stromstärke in der Mess-Strecke [A];	R_B ,	Widerstand bei Bezugstemperatur T_B (Gl. 6) [Ω];
K ,	Widerstandsverhältnis in Gl. (9);	ΔR_x ,	wirkliche Messgenauigkeit der Thomson-Brücke (Gl. 8) [Ω];
J_0 , J_1 ,	Besselfunktionen erster Art, nullter und erster Ordnung;	T ,	Temperaturen [$^\circ\text{C}$];
K_0 , K_1 ,	Besselfunktionen zweiter Art, nullter und erster Ordnung;	$T(r)$,	Temperaturverteilung in der Rohrwand [$^\circ\text{C}$];
M , N ,	Widerstände der Thomson-Brücke (Abb. 3) [Ω];	ΔT_x ,	absoluter Fehler nach Gl. (10) [grad];
		U_{0-x} ,	Spannungsabfall vom Anfang der Beheizung bis zur Stelle x [V];
		ΔU ,	Spannungsabfall am Teilstück Δx [V];
		ΔU_{eff} , ΔU_v , ΔU_0 , ΔU_{gem} ,	Spannungsabfall am Teilstück Δx (Effektivwert,

* Erweiterte und überarbeitete Fassung des Berichtes EUR 348.d der gleichen Autoren.

† Auszugsweise vorgetragen auf der internen Arbeitssitzung des Fachausschusses Wärmeaustauscher und Verdampfer der Verfahrenstechnischen Gesellschaft (VTG) im VDI in Wiesbaden am 28.10.64 v. erstgenannten Verfasser.

	Effektivwert einer Komponente, Gleichspannungsmittelwert, gemessener Spannungsabfall) [V];	$\gamma,$	dimensionslose Rohrkoordinate in Gl. (16);
$W(r), W(\varphi),$	Wärmequellenverteilung in der Rohrwand [W/m^3];	$\varepsilon,$	Temperaturkoeffizient des spezifischen elektrischen Widerstandes (Gl. 6 oder 21) [$1/\text{grad}$];
$W_m,$	mittlere Wärmequelleneigenschaft [W/m^3];	$\vartheta,$	Temperaturdifferenz nach Gl. (12) [grad];
$W_0,$	aus Messwerten berechnete Wärmequellenverteilung (Gl. 44) [W/m^3];	$\Delta\vartheta_{wA}, \Delta\vartheta_{wB},$	relative Abweichungen der Temperaturdifferenzen in der Rohrwand (Gl. 32 und 33);
$\Delta W,$	Unterschied in der Wärmequellenverteilung nach Gl. (44) [W/m^3];	$\alpha,$	Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit (Gl. 14) [$1/\text{grad}$];
$a,$	Temperaturleitfähigkeit des Klebematerials (Gl. 5) [m^2/s];	$\lambda,$	Wärmeleitfähigkeit [$\text{W}/\text{m grad}$];
$c_k,$	mittlere spezifische Wärme des Kühlmediums [$\text{J}/\text{kg grad}$];	$\mu,$	dynamische Viskosität des Kühlmediums [$\text{kg}/\text{m s}$];
$d,$	Rohrdurchmesser [m];	$\nu,$	Frequenzkomponente (Gl. 42);
$f,$	relativer Fehler der Widerstände der Thomson-Brücke (Gl. 9);	$\zeta,$	Widerstandsbeiwert der Strömung (Gl. 53 und 54);
$g,$	Verhältnis der Stromdichten (Gl. 38);	$\rho,$	spezifischer elektrischer Widerstand [Ωm];
$h,$	Stromdichte — Verteilungsfunktion (Gl. 37);	$\sigma,$	elektrische Leitfähigkeit [$1/\Omega\text{m}$];
$i_1, i_2,$	Stromstärken in den Zweigen der Thomson-Brücke (Abb. 3) [A];	$\tau,$	Halbwertszeit des Thermoelements (Gl. 5) [s];
$k,$	Konstante in Gl. (35) [$1/\text{m}$];	$\varphi,$	dimensionslose Radiuskoordinate (Gl. 20);
$m, n,$	Widerstände der Thomson-Brücke (Abb. 3) [Ω];	$\bar{\varphi},$	Radienverhältnis (Gl. 20);
$q_h,$	Wärmestromdichte [W/m^2];	$\psi,$	Stromdichte nach Gl. (36) [A/m^2];
$r,$	Rohrradius [m];	$\psi_0,$	Stromdichte am Aussenrand (Gl. 36) [A/m^2];
$v,$	Strömungsgeschwindigkeit des Kühlmittels [m/s];	$\omega,$	Kreisfrequenz [$1/\text{s}$];
$x, \Delta x,$	Längenabschnitte auf der Mess-Strecke (Abb. 1) [m/s].	$\Phi,$	Geometriefaktor nach Gl. (30).

Griechische Symbole

$\alpha,$	Wärmeübergangszahl [$\text{W}/\text{m}^2 \text{grad}$];
$\alpha_v,$	Phasenwinkel in Gl. (42);
$\beta,$	Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit (Gl. 15) [$1/\text{grad}$];

Dimensionslose Kennzahlen

$Nu,$	$= \frac{\alpha \cdot d_w}{\lambda},$ Nusseltsche Kennzahl;
$Pr,$	$= \frac{\mu \cdot c_k}{\lambda},$ Prandtlsche Kennzahl;

$$Re, = \frac{4Q_m}{\pi d_w \mu}, \text{ Reynoldsche Kennzahl.}$$

Indizes

<i>a</i> ,	Rohraussenwand;
<i>b</i> ,	“Bulk” (Mittelwert, bezogen auf den Wärmemassenstrom);
<i>f</i> ,	Flüssigkeitsfilm;
<i>i</i> ,	Rohrinnenwand;
<i>is</i> ,	isolierte Rohrwandseite;
<i>m</i> ,	Mittelwert (allgemein);
<i>w</i> ,	gekühlte Rohrwandseite;
<i>x</i> ,	örtlich, an bestimmter Länge der Mess-Strecke;
<i>R</i> ,	Rohrwand;
<i>Rm</i> ,	Mittelwert in der Rohrwand;
<i>T</i> ,	mit Thermoelement gemessener Wert (Gl. 4);
100,	Bezugswert (100°C);
0,	Eintritt in Mess-Strecke.

EINLEITUNG

ZUR Ermittlung örtlicher und mittlerer Wärmeübergangszahlen von strömenden Medien bei hohen Wärmestromdichten werden in erster Linie direkt elektrisch beheizte Versuchsrohre benutzt, die innen- oder aussengekühlt sind. Die Messung der Temperatur der gekühlten Oberfläche, die für die Berechnung der Wärmeübergangszahl notwendig ist, stösst fast immer auf grosse Schwierigkeiten [1]. So muss man sich damit begnügen, die Temperatur der ungekühlten, isolierten Oberfläche mit Thermoelementen oder die mittlere Wandtemperatur mithilfe des elektrischen Widerstandes zu messen. Die Differenz zwischen der gemessenen Temperatur und der gesuchten Temperatur der gekühlten Oberfläche, die bei hohen Wärmestromdichten erhebliche Werte annehmen kann, lässt sich rechnerisch aus der Lösung der Differentialgleichung für Wärmeleitung in einer Rohrwand mit Wärmequellen und temperaturabhängigen Stoffwerten bestimmen.

MESSTECHNISCHE GRUNDLAGEN

Um die Wärmeübergangsverhältnisse bei der Strömung von Medien in oder an Rohren bei hohen Wärmestromdichten besser übersehen zu können, ist es wünschenswert, örtliche Wärmeübergangszahlen zu kennen. Deren Messung ist jedoch nur möglich, wenn man Mittelwerte der Wärmeübergangszahl in beliebig kleinen Teilstücken der Versuchsstrecke bestimmt. Die Berechnung dieser „örtlichen“ Wärmeübergangszahl folgt aus ihrer Definitionsgleichung:

$$\alpha = \frac{q_h}{T_w - T_b} \quad (1)$$

Eine direkte Messung der drei Grössen, die zur Ermittlung der Wärmeübergangszahl nach Gl. (1) benötigt werden, ist nicht möglich. Sie lassen sich aber aus Messungen anderer Grössen berechnen.

Die Wärmestromdichte q_h an einer gewissen Stelle $[x + (\Delta x/2)]$ der beheizten Versuchsstrecke vom Beginn der Beheizung aus ergibt sich für ein Teilstück Δx (Abb. 1) durch Messung des Gesamtstromes I und des Spannungsabfalls ΔU an dem Teilstück Δx :

$$q_h = \frac{I \cdot \Delta U}{\pi \cdot d_w \cdot \Delta x} \quad (2)$$

Dabei ist d_w der Durchmesser der vom Kühlmedium benutzten Rohroberfläche. Die Bulktemperatur T_b an dieser Stelle $[x + (\Delta x/2)]$ lässt sich aus der Aufwärmung des Kühlmediums vom Anfang der Beheizung der Versuchsstrecke berechnen:

$$T_b = T_0 + \frac{I(U_{0-x} + \frac{1}{2}\Delta U)}{Q_m \cdot c_k} \quad (3)$$

Die Wandtemperatur T_w der gekühlten Oberfläche der Versuchsstrecke muss aus der Messung der Temperatur der ungekühlten, isolierten Oberfläche T_{is} oder der mittleren Wandtemperatur T_m , die aus der Messung des mittleren elektrischen Widerstandes folgt, berechnet werden.

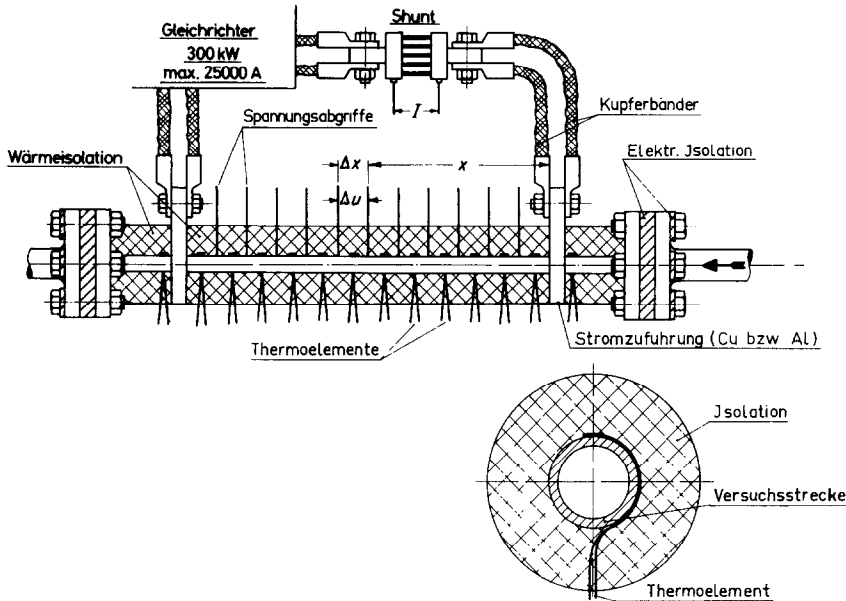


ABB. 1. Versuchsstrecke mit direkter elektrischer Beheizung.

MESSUNG DER TEMPERATUR T_{is} DER UNGEKÜHLTEN OBERFLÄCHE

Auf der ungekühlten Oberfläche der Versuchsstrecke werden jeweils in der Mitte eines Teilstückes Δx , in dem die „örtliche“ Wärmeübergangszahl ermittelt werden soll, Thermoelemente, elektrisch isoliert gegenüber der Mess-Strecke, fest aufgebracht. Die elektrische Isolation des Elementes ist erforderlich, da wegen der Beheizung der Mess-Strecke mit Gleichstrom durch den Spannungsabfall an der Schweissperle des Elementes erhebliche Messfehler auftreten können. Diese elektrische Isolierung des Thermoelementes von der Rohrwand stellt gleichzeitig eine Wärmeisolation des Elementes dar. Der dadurch bedingte Temperaturabfall in der Isolierfolie ($< 0,1$ mm Dicke) lässt sich jedoch durch eine gute Isolation der Mess-Strecke sehr klein halten. Wärmeableitungsfehler der Thermoelemente lassen sich weitgehend ausschalten, indem man den Thermodraht über die Länge etwa eines halben Rohrumfanges auf gleicher Rohrwandtemperatur hält.

Der durch den Temperaturabfall in der Isolierfolie bedingte Messfehler lässt sich berechnen:*

$$\frac{T_{is} - T_T}{T_T - T_u} = \frac{\frac{S_F}{\lambda_F \cdot d_a}}{\frac{1}{2\lambda_I} \ln \left(1 + \frac{2S_I}{d_a} \right) + \frac{1}{\alpha_u \cdot d_a (1 + 2S_I/d_a)}} \quad (4)$$

Für ein Rohr von beispielsweise 14 mm Aussendurchmesser ergeben sich die in Abb. 2 dargestellten Temperaturdifferenzen. Für eine Temperaturdifferenz $T_T - T_u = 200$ grad zwischen Thermoelement und Raum schwankt

* Diese Beziehung gilt für das innengekühlte Rohr. Beim aussengekühlten Rohr (z. B. in einem Ringspalt) erfolgt die Temperaturmessung mithilfe einer speziellen Mess-Sonde, mit der an den verschiedenen Stellen die Thermoelemente isoliert gegen die Innenwand des Rohres gedrückt werden. Im Rohrrinnern stellt sich in Radiusrichtung eine konstante Temperatur ein, wenn man die Konvektion durch geeignete Massnahmen unterbindet. Die Thermoelemente zeigen dann die wahre Temperatur T_{is} der Rohrwand an.

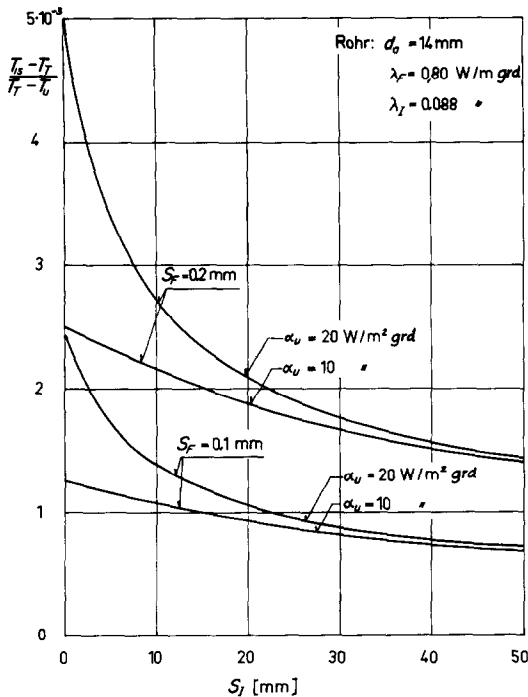


ABB. 2. Temperaturdifferenzverhältnis für ein elektrisch isoliert aufgebrachtes Thermoelement auf der Rohrwand (14 mm Ø) berechnet nach Gl. 4. (T_{is} = Rohrwandtemperatur; T_T = Temperatur des Thermoelementes; T_u = Umgebungstemperatur; S_I = Isolierschalendicke; S_F = Foliendicke; α_u = Wärmeübergangszahl an der Aussenseite der Isolierung).

der Temperaturabfall ($T_{is} - T_T$) in der Klebefolie von $S_F = 0,1$ mm Stärke bei einer Isolierstärke von $S_I = 30$ mm um 0,16 bis 0,18 grad, wenn sich der äussere Wärmeübergang an der Isolierung (α_u) von 10 auf $20 \text{ W/m}^2 \text{ grad}$ ändert. Diese Abweichung ist gegenüber der Messgenauigkeit der Thermoelemente und gegenüber der Genauigkeit des Berechnungsverfahrens für T_w und der Kenntnis der Wärmeleitfähigkeit λ_R des Rohrwandmaterials vernachlässigbar klein.

Die Wärmeisolation der Mess-Strecke bewirkt bei schnellen Änderungen der Rohrwandtemperatur unter Umständen eine Verzögerung der Anzeige des Thermoelementes. Bei nicht isolierter Mess-Strecke (d. h. $S_I = 0$, Abb. 2) ergeben sich folgende Fehler in der Wand-

temperaturmessung: Bei einer Temperaturdifferenz $T_T - T_u = 200$ grad zwischen Thermoelement und Raum schwankt der Temperaturabfall ($T_{is} - T_T$) in der Folie bei einer Klebefolienstärke von $S_F = 0,1$ mm um 0,25 bis 0,5 grad, wenn sich α_u von 10 auf $20 \text{ W/m}^2 \text{ grad}$ ändert.

Die Halbwertszeit des aufgekebtten Thermoelementes bei nicht isoliertem Rohr lässt sich für eine einmalige plötzliche Temperaturänderung der Rohrwand näherungsweise angeben [2] zu:

$$\tau = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{S_F^2}{a} \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) = 0,38 \frac{S_F^2}{a} \quad (5)$$

Für eine Klebefolie mit der Dicke $S_F = 0,1$ mm und der Temperaturleitzahl $a = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ beträgt die Halbwertszeit $\tau \approx 10$ ms.

MESSUNG DES MITTLEREN ELEKTRISCHEN WIDERSTANDES*

Bekanntlich lässt sich mithilfe des mittleren elektrischen Widerstandes R_x des beheizten Rohrstückes der Länge Δx auch seine mittlere Temperatur T_x bestimmen:

$$R_x = R_B [1 + \varepsilon(T_x - T_B)] \quad (6)$$

worin R_B den Widerstand des Längenstücks bei der Bezugstemperatur T_B und ε [1/grad] den Temperaturkoeffizienten für den elektrischen Widerstand des verwendeten Rohrwandmaterials bezeichnen. Zur genauen Bestimmung der mittleren Wandtemperatur mithilfe dieser Methode muss eine Präzisions-Thomson-Brücke verwendet werden.

Wie gezeigt wird, führt die Messung des örtlichen Widerstandes an einem Teilstück Δx unter Umständen zu erheblichen Fehlern, da der Widerstand R_a (Abb. 3) des zwischen dem zu messenden Widerstand R_x und dem Normalwiderstand R_N gelegenen Rohrstückes der Länge x nicht sehr klein ist gegenüber R_x . Bei Gleichgewicht an den Punkten E und F der Brücke

* Die Abschätzung des Fehlers bei der Messung des mittleren elektrischen Widerstandes wurde von J. Dupont und J. Camposilvan angeregt.

(Abb. 3) gilt:

$$R_x = \frac{M}{N} R_N + n \frac{i_2}{I} \left(\frac{M}{N} - \frac{m}{n} \right) \quad (7)$$

Bei einer Präzision in der Herstellung der Brücke von ± 0 Prozent wäre funktionsgemäss $M/N = m/n$ und mithin der erste Summand in Gl. (7) der exakte Widerstand R_{x0} . Die Differenz beider R_x -Werte, d. h. $\Delta R_x = R_x - R_{x0}$, stellt somit die wirkliche Messungenauigkeit der Brücke dar. Mithilfe des Spannungsabfalls an den Punkten B und C: $u = (I - i_2) R_a = (m$

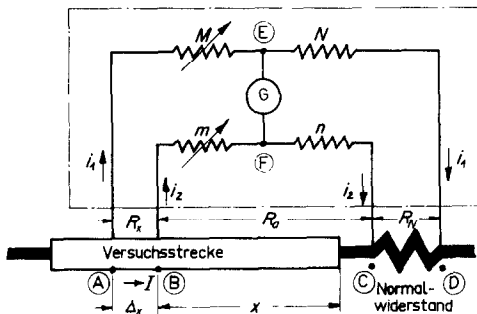


ABB. 3. Schematische Darstellung der Messanordnung einer Thomson-Brücke (R_x = zu messender Widerstand; R_a = Aussenwiderstand; R_N = Normalwiderstand; M, m = Regelwiderstände; N, n = Festwiderstände; G = Nullgalvanometer).

+ n) i_2 ergibt sich mit der Vernachlässigung, dass $R_a \ll (m + n)$ ist:

$$\frac{\Delta R_x}{R_a} = \frac{\frac{M}{N} - \frac{m}{n}}{1 + \frac{m}{n}} \quad (8)$$

Unter der Annahme, dass jeder Einzelwiderstand der Brücke mit dem gleichen relativen Fehler f behaftet ist, das heisst beispielsweise für $M: f = (\Delta M/M)$, ergibt sich für die Differenz der Widerstandsverhältnisse im Zähler ein relativer Fehler von $4f$ K. Nimmt man für diese Fehlerabschätzung an, dass $(M/N) \approx (m/n) = K$ ist, ergibt sich aus Gl. (8):

$$\frac{\Delta R_x}{R_a} = 4f \frac{K}{1 + K} \quad (9)$$

Für die vorliegenden Messungen ist $K > 10$,

und damit wird $K/(1 + K) \approx 1$. Mit Gl. (6) kann man aus der Widerstandsungenauigkeit ΔR_x die Ungenauigkeit ΔT_x in der Temperaturbestimmung berechnen. Andererseits gilt für ein Rohr mit gleichbleibendem Querschnitt, dass R_x proportional Δx und R_a proportional x ist. Somit wird der absolute Fehler in der Bestimmung der mittleren Wandtemperatur:

$$\Delta T_x = \frac{4f}{\varepsilon} \cdot \frac{x}{\Delta x} \quad (10)$$

Man erkennt, dass ΔT_x umso grösser wird, je ungenauer die Widerstände der Brücke (f) hergestellt sind, je grösser der Abstand x der vorgeschalteten Rohrstrecke ist, je enger die Abgriffe A und B (Δx) zusammenliegen und je kleiner der Temperaturkoeffizient ε für den Widerstand des Rohrmaterials ist. Nur bei $x = 0$, das heisst bei Messung des Widerstandes der gesamten Versuchsstrecke oder des 1. Teilstückes bei R_N , verschwindet der Fehler ΔT_x .

Bei Verwendung einer fünfdkadigen Präzisions-Thomsonbrücke mit $f = 0,01$ Prozent = 10^{-4} ist für ein Rohr aus rostfreiem Stahl ($\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$ 1/grad) der Faktor $4f/\varepsilon = 0,5$ grad. Bei unseren Versuchen variierte $x/\Delta x$ von 0 bis 12, und somit schwankt ΔT_x von 0 bis 6 grad. Für Aluminium ($\varepsilon = 3,6 \cdot 10^{-3}$ 1/grad) und Kupfer ($\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ 1/grad) variieren die entsprechenden ΔT_x -Werte zwischen 0 und 1,33 grad bzw. 0 und 1,6 grad.

DIE BERECHNUNG DER TEMPERATUR DER GEKÜHLTEN OBERFLÄCHE

Die Berechnung der Temperatur T_w der gekühlten Oberfläche erfordert die Lösung der Fourierschen Differentialgleichung für ein zeitlich konstantes Temperaturfeld in einer Rohrwand mit Wärmequellen. Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit λ_R des Rohrwandmaterials, so wird das Temperaturfeld in der Rohrwand durch folgende Differentialgleichung in Polarkoordinaten beschrieben [3]:

$$\frac{d}{dr} \left[\lambda_R \cdot r \frac{d\vartheta}{dr} \right] + W(r) \cdot r = 0 \quad (11)$$

Dabei wurde die Wärmeleitung in axialer Richtung vernachlässigt. In Gl. (11) bedeutet $W(r)$ die pro Volumeneinheit entwickelte Wärmeenergie. Diese ist bei Annahme temperaturabhängigen Widerstandes des Materials eine Funktion des Radius r . Die Grösse ϑ stellt die auf die Temperatur T_{is} der isolierten Oberfläche bezogene (negative!) Temperaturdifferenz dar:

$$\vartheta = T(r) - T_{is} \quad (12)$$

Für die Wärmequelleneigigkeit $W(r)$ ergibt sich mit dem Spannungsabfall ΔU längs des Teilstücks Δx :

$$W(r) = \frac{(\Delta U / \Delta x)^2}{\rho(r)} = \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)^2 \sigma(r) \quad (13)$$

wobei $\rho(r)$ und $\sigma(r)$ den spezifischen elektrischen Widerstand bzw. die elektrische Leitfähigkeit des Wandmaterials bedeuten. Zur Lösung der Differentialgleichung (11) führte R. Gerber [4] eine Koordinatentransformation durch

$$r = r_{is}(1 + E \cdot \gamma)$$

wobei:

$$E = \frac{r_w - r_{is}}{r_{is}}$$

Unter der Abnahme einer linearen Temperaturabhängigkeit sowohl für λ_R als auch für σ gemäss:

$$\sigma = \sigma_{is}(1 + \kappa_{is} \cdot \vartheta) \quad (14)$$

$$\lambda_R = \lambda_{is}(1 + \beta_{is} \cdot \vartheta) \quad (15)$$

erhält Gerber:

$$\frac{d}{d\gamma} \left[(1 + E\gamma)(1 + \beta_{is} \cdot \vartheta) \frac{d\vartheta}{d\gamma} \right] + 2D(1 + E\gamma)(1 + \kappa_{is} \cdot \vartheta) = 0 \quad (16)$$

$$D = \frac{\sigma_{is}(\Delta U / \Delta x)^2 (r_w - r_{is})^2}{2\lambda_{is}} \quad (17)$$

Die Stoffwerte mit dem Index is beziehen sich immer auf die Temperatur T_{is} der isolierten Oberfläche.

Die Differentialgleichung (16) löste Gerber für die Randbedingungen: $\gamma = 0$: $\vartheta = (d\vartheta/d\gamma) =$

0 durch einen Reihenansatz in γ und erhielt für $\gamma = 1$ den Temperaturabfall in der Rohrwand für Innen- oder Aussenkühlung:

$$\vartheta_w = T_w - T_{is} = D \left\{ -1 + \frac{E}{3} + \left[\frac{D}{6} (\kappa_{is} - 3\beta_{is}) - \frac{E^2}{4} \right] + \left[\frac{ED}{15} (5\beta_{is} - \kappa_{is}) + \frac{E^3}{5} \right] + \left[\frac{D^2}{90} (\kappa_{is} - 3\beta_{is})(15\beta_{is} - \kappa_{is}) + \frac{E^2 D}{180} (9\kappa_{is} - 55\beta_{is}) - \frac{E^4}{6} \right] + \dots \right\} \quad (18)$$

Dabei sind die ersten fünf Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt. Die Lösung (18) konvergiert, solange die Bedingungen:

$$|E| < 0,4 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\kappa_{is} \cdot D}{\beta_{is} \cdot D} \right| < 0,2$$

erfüllt sind. Sie ist also aufgrund der geometrischen Bedingung (E) anwendbar für Rohre mit einem Radienverhältnis: $\bar{\varphi} = r_a/r_i$

$\bar{\varphi} < 1,67$ bei Innenkühlung

$$\left(E = \frac{r_i - r_a}{r_a}; |E| = \frac{\bar{\varphi} - 1}{\bar{\varphi}} \right)$$

$\bar{\varphi} < 1,40$ bei Aussenkühlung

$$\left(E = \frac{r_a - r_i}{r_i}; |E| = \bar{\varphi} - 1 \right)$$

Da der Ausdruck D (Gl. 17) als eine erste Näherung des Temperaturabfalls in der Wand angesehen werden kann, stellen die anderen Bedingungen ein physikalisches Kriterium dar und liefern folgende maximale Temperaturdifferenzen ($T_{is} - T_w$) in der Wand als Grenzen für die Anwendbarkeit der Lösung:

- Rostfreier Stahl: $\kappa_{is} \approx \beta_{is} \approx 0,8 \cdot 10^{-3}$ 1/grad;
 $D < 250$ grd
- Aluminium: $\kappa_{is} \approx 4 \cdot 10^{-3}$ 1/grad;
 $D < 50$ grd

Kupfer: $\alpha_{is} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/grad}$
 $D < 67 \text{ grad}$

Wie die Auswertung der Gl. (18) zeigt, liegen diese Grenzen innerhalb des technisch interessierenden Bereiches und werden bereits bei mittleren Wärmestromdichten überschritten. Eine Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches ist möglich, indem in der Reihenentwicklung weitere Glieder berücksichtigt werden. Dadurch wird allerdings auch die ohnehin schon komplizierte Gl. (18) noch unübersichtlicher und für die praktische Anwendung aufwendiger und unbequemer. Darüberhinaus besteht ein gewisser Mangel in der Gl. (18) darin, dass kein expliziter Zusammenhang zwischen $(T_{is} - T_w)$ und der Wärmestromdichte q_h der gekühlten Oberfläche gegeben ist. Die für die Anwendbarkeit dieser Lösung maximal zulässigen Wärmebelastungen q_h können erst bestimmt werden, wenn $\Delta U/\Delta x$ bekannt ist. Führt man statt dieses Spannungsabfalls $\Delta U/\Delta x$ die Wärmestromdichte q_h ein, die sich nach Gl. (2) aus der Messung von ΔU am Teilstück Δx und des Gesamtstromes I in der Mess-Strecke berechnen lässt, so gilt:

$$q_h = \frac{(\Delta U/\Delta x) \cdot I}{2\pi r_w} = \frac{W_m}{2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_w} \quad (19)$$

Im Querschnitt $A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$ des Rohres ist das Potential U konstant, nicht aber die Stromstärke. Der mittlere Strom I wird direkt gemessen. Die mittlere Wärmequelleneigebigkeit W_m über den Querschnitt A pro Längeneinheit des Rohres wird nun:

$$W_m = \frac{1}{A} \int_0^A W(r) dA \\ = \frac{2}{\bar{\varphi}^2 - 1} \int_1^{\bar{\varphi}} \frac{\varphi \cdot d\varphi}{(1 + \varepsilon_{is}\vartheta)\rho_{is}} \cdot \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)^2 \quad (20)$$

mit

$$\varphi = \frac{r}{r_i} \\ \bar{\varphi} = \frac{r_a}{r_i}$$

Nimmt man eine lineare Temperaturabhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes ρ des Rohrwandmaterials an,

$$\rho = \rho_{is}(1 + \varepsilon_{is} \cdot \vartheta) \quad (21)$$

ergibt sich aus Gl. (13) für die Wärmequellenverteilung in Radiusrichtung:

$$W(\varphi) = \frac{q_h \cdot r_w}{r_i^2} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_{is} \cdot \vartheta) \int_1^{\bar{\varphi}} \frac{\varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon_{is} \vartheta)}} \quad (22)$$

Mit Einführung des dimensionslosen Radius φ und bei linearen Temperaturabhängigkeiten von λ_R und ρ (Gl. 15 und 21), schreibt sich die Differentialgleichung (11):

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d\vartheta}{d\varphi} + \frac{\beta_{is}}{1 + \beta_{is}\vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 \\ + \frac{q_h \cdot r_w}{\lambda_{is}(1 + \beta_{is}\vartheta)(1 + \varepsilon_{is}\vartheta) \int_1^{\bar{\varphi}} \frac{\varphi d\varphi}{1 + \varepsilon_{is}\vartheta}} = 0 \quad (23)$$

Die Randbedingungen lauten für ein Rohr mit

$$\text{Innenkühlung: } \vartheta(\varphi = \bar{\varphi}) = \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)_{\varphi=\bar{\varphi}} = 0$$

$$\text{Aussenkühlung: } \vartheta(\varphi = 1) = \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)_{\varphi=1} = 0.$$

Die Lösung dieser nichtlinearen Integro-Differentialgleichung (23) ist nur noch auf numerischem Wege möglich.* Da das Lösungsverfahren iterativ arbeitet, ist die Genauigkeit der numerischen Lösung von der Zahl der Iterationen abhängig. Als Iterationskriterium wurde ein Unterschied von 0,1 Promille für zwei aufeinanderfolgende Iterationsergebnisse eingeführt. Weiterhin wurde die maximale Zahl der Iterationsschritte auf 50 beschränkt. Diese Grenzen werden jedoch, wie die Auswertung

* Ein entsprechendes Lösungsverfahren wurde von I. Gargantini ausgearbeitet und in FORTRAN für den Digitalrechner IBM 7090 programmiert.

zeigt, in technisch interessanten Anwendungsfällen nicht erreicht. Das Verfahren wird erst instabil und die vorgeschriebene Genauigkeit innerhalb der 50 Iterationsschritte nicht erreicht, wenn aufgrund des Radienverhältnisses $\bar{\varphi}$, der Wärmeentwicklung pro Längeneinheit des Rohres $q_h \cdot r_w$ und des Temperaturniveaus T_{is} die Temperaturdifferenz ($T_{is} - T_w$) in der Rohrwand bereits ausserhalb physikalisch sinnvoller Gröszenordnungen liegt.

Mit Gl. (18) und der numerischen Lösung der Gl. (23) wird die Temperatur T_w der gekühlten Rohroberfläche aus dem gesamten Temperaturabfall in der Wand $\vartheta_w = T_w - T_{is}$ berechnet mithilfe der gemessenen Temperatur T_{is} der isolierten Oberfläche. Ermittelt man die mittlere Rohrwandtemperatur T_m aus der Messung des mittleren elektrischen Widerstandes, so ist die Temperatur T_w der gekühlten Seite aus der Temperaturdifferenz ($T_m - T_w$) zu berechnen. Dabei gewinnt man die Temperatur T_m aus der Temperaturverteilung $\mathcal{T}(\varphi)$ in der Rohrwand, die aus den Lösungen der beiden Differentialgleichungen (16) oder (23) folgt. Aus einer Betrachtung über die in der Rohrwand dissipierte elektrische Energie folgt mit den Gl. (20) und (13):

$$W_m = \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)^2 \frac{2}{\bar{\varphi}^2 - 1} \int_1^{\bar{\varphi}} \sigma(\varphi) \varphi \, d\varphi \quad \equiv \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)^2 \sigma_m$$

Nimmt man gemäss Gl. (14) für die elektrische Leitfähigkeit eine lineare Temperaturabhängigkeit an, folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_{is}(1 + \kappa_{is} \vartheta_m) \\ &= \frac{2\sigma_{is}}{\bar{\varphi}^2 - 1} \int_1^{\bar{\varphi}} (1 + \kappa_{is} \vartheta) \varphi \, d\varphi \\ \vartheta_m &= T_m - T_{is} \\ &= \frac{2}{\bar{\varphi}^2 - 1} \int_1^{\bar{\varphi}} \vartheta(\varphi) \varphi \, d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Für den Fall, dass mit dem spezifischen elektrischen Widerstand ρ gerechnet wird, ergibt sich in entsprechender Weise:

$$\vartheta_m = T_m - T_{is} = \frac{1}{\varepsilon_{is}} \left[\frac{\bar{\varphi}^2 - 1}{2 \int_1^{\bar{\varphi}} [\varphi \, d\varphi / (1 + \varepsilon_{is} \vartheta)]} - 1 \right] \quad (25)$$

Der gesuchte Temperaturabfall ($T_m - T_w$) folgt dann aus:

$$T_m - T_w = \vartheta_m - \vartheta_w \quad (26)$$

G. Grass [1] löste die Differentialgleichung (11) unter der vereinfachenden Annahme temperaturunabhängiger Stoffwerte der Rohrwand (λ_R und ρ), d. h. konstanter Wärmequellenverteilung in radialer Richtung, und erhielt für ein Rohr mit Innen- oder Aussenkühlung:

$$T_{is} - T_w = \frac{q_h \cdot r_w}{\lambda_R} \cdot \frac{\varphi_w^2 - \varphi_{is}^2 - 2\varphi_{is}^2 \ln(\varphi_w/\varphi_{is})}{2(\bar{\varphi}^2 - 1)} \quad (27)$$

$$T_m - T_w = \frac{q_h \cdot r_w}{\lambda_R} \cdot \frac{4\varphi_w^2 \varphi_{is}^2 - 3\varphi_{is}^4 - 4\varphi_{is}^4 \ln(\varphi_w/\varphi_{is})}{4(\bar{\varphi}^2 - 1)(\varphi_{is}^2 - \varphi_w^2)} \quad (28)$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$\bar{\varphi} = \frac{r_a}{r_i} \quad \varphi_w = \frac{r_w}{r_i} \quad \varphi_{is} = \frac{r_{is}}{r_i}$$

wobei für das innengekühlte Rohr ($r_w = r_i$; $r_{is} = r_a$) $\varphi_w = 1$ und $\varphi_{is} = \bar{\varphi}$ und das aussengekühlte Rohr ($r_w = r_a$; $r_{is} = r_i$) $\varphi_w = \bar{\varphi}$ und $\varphi_{is} = 1$ gesetzt werden muss.

Die mittlere Temperatur T_m in der Rohrwand wurde von Grass als integraler Mittelwert der Temperaturverteilung $\mathcal{T}(\varphi)$ in der Rohrwand bei konstanter Wärmequellenverteilung berechnet und entspricht genau der Gl. (24), die aus einer Betrachtung der dissipierten elektrischen Energie abgeleitet wurde. Sowohl für das innen- als auch das aussengekühlte Rohr gilt:

$$T_{is} - T_m = \frac{q_h \cdot r_w}{\lambda_R} \Phi \quad (29)$$

$$\Phi = \frac{\bar{\varphi}^4 - 1 - 4\bar{\varphi}^2 \ln \bar{\varphi}}{4(\bar{\varphi}^2 - 1)^2} \quad (30)$$

Wenn man in den Gl. (27) und (28) anstelle eines konstanten Wertes λ_R für die Wärmeleitfähigkeit den der Temperatur T_m entsprechenden mittleren Wert λ_{Rm} einsetzt, so ist dieser bei der Messung des mittleren elektrischen Rohrwiderstandes (aus dem T_m wie früher beschrieben folgt) direkt zu entnehmen. Im anderen Falle bei Messung der Temperatur T_{is} der isolierten Rohroberfläche kann λ_{Rm} aus folgender Beziehung, der Gl. (15) zugrunde liegt, berechnet werden:

$$\lambda_{Rm} = \frac{\lambda_{is}}{2} \left[1 + \sqrt{\left(1 - 4 \frac{q_h r_w}{\lambda_{is}} \cdot \beta_{is} \Phi \right)} \right] \quad (31)$$

wobei λ_{is} und β_{is} die Wärmeleitfähigkeit und ihr Temperaturkoeffizient bei der gemessenen Temperatur T_{is} und Φ den Geometriefaktor nach Gl. (30) bedeuten.

Zur Gegenüberstellung der Ergebnisse ($T_{is} - T_w$), die man aus der numerischen Lösung der Differentialgleichung (23), aus der analytischen Lösung (Gl. 18) sowie aus der Lösung bei konstanter Wärmequellenverteilung (Gl. 27) erhält, wurden Vergleichsrechnungen für verschiedene Rohrgeometrien, Wärmebelastungen und Temperaturen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abb. 4, 5 und 6 dargestellt. Als Grösse für die Abszisse wurde $q_h \cdot r_w / \lambda_{is}$ [grad] gewählt, die in allen Lösungen als Parameter auftritt, denn auch die Grösse D nach Gl. (17) lässt sich auf eine Form bringen, die diesen Parameter enthält:

$$D = \frac{q_h \cdot r_w}{\lambda_{is}} \cdot \frac{(\varphi_w - \varphi_{is})^2}{2} \cdot \frac{1}{\int_1^{\bar{\varphi}} (1 + \alpha_{is} \vartheta) \varphi \, d\varphi}$$

Die Abb. 4 zeigt die Temperaturdifferenzen ($T_{is} - T_w$) in einem direkt elektrisch beheizten und innengekühlten Rohr aus rostfreiem Stahl, wie sie sich aus der numerischen Lösung der Differentialgleichung (23) ergeben. Als Bezugswerte für die Stoffwerte des Rohrwandmaterials (bei 100°C) sind die eines 18.8 CrNi-Stahls

herangezogen worden: $\lambda_{100} = 15,7 \text{ W/m grad}$; $\beta_{100} = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ 1/grad}$; $\rho_{100} = 0,84 \Omega \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$; $\varepsilon_{100} = 0,81 \cdot 10^{-3} \text{ 1/grad}$. Die Kurven gelten für eine Temperatur der isolierten Oberfläche von $T_{is} = 800^\circ\text{C}$. Die Rechnung ergibt, dass im technisch interessierenden Bereich von $100 \leq T_{is} \leq 800^\circ\text{C}$ mit $T_w \geq 0^\circ\text{C}$ (Temperatur der gekühlten Oberfläche) die maximale Abweichung der Kurven für andere T_{is} -Werte nicht mehr als +3 Prozent von den gezeichneten Kurven beträgt. Dieses Ergebnis zeigt, dass die Änderungen des elektrischen Widerstandes und des Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur keinen grossen Einfluss auf den Temperaturabfall ($T_{is} - T_w$) in der Rohrwand haben. Man dürfte damit die Darstellungen in den Abb. 4, 5 und 6 auch für andere Materialien mit ähnlichen Stoffwerten benützen können.

In Abb. 5 sind für das gleiche Rohrmaterial wie in Abb. 4 die relativen Abweichungen $\Delta \vartheta_{w,A}$ des Temperaturabfalls in der Wand der Näherungslösung (Gl. 27) von der numerischen Lösung (nach Gl. 23) dargestellt. Dabei ist:

$$\Delta \vartheta_{w,A} = \frac{(T_{is} - T_w)_{\text{num.}} - (T_{is} - T_w)_{\text{Gl. 27}}}{(T_{is} - T_w)_{\text{num.}}} \quad (32)$$

Man erkennt, dass im technisch interessierenden Bereich ($100 \leq T_{is} \leq 800^\circ\text{C}$, $T_w \geq 0^\circ\text{C}$) bei nicht zu grossen Radienverhältnissen ($\bar{\varphi} < 1,4$) die Abweichungen $\Delta \vartheta_{w,A}$ unter 5 Prozent bleiben. Bedenkt man, dass die Wärmeleitfähigkeit λ_{is} bestenfalls mit ± 5 Prozent Genauigkeit bekannt ist, kann man für die meisten Fälle immer mit der Näherungslösung (Gl. 27) für konstante Stoffwerte des Rohrwandmaterials rechnen. Für λ_R ist dann jedoch der Mittelwert nach Gl. (31) einzusetzen. Für extreme Wärmebelastungen und grosse Radienverhältnisse können die Korrekturen aus Abb. 5 entnommen werden.

In Abb. 6 sind schliesslich für das gleiche Rohrmaterial wie in Abb. 4 die relativen Abweichungen $\Delta \vartheta_{w,B}$ der Näherungslösung (Gl. 18) von der numerischen Lösung (Gl. 23) dargestellt.

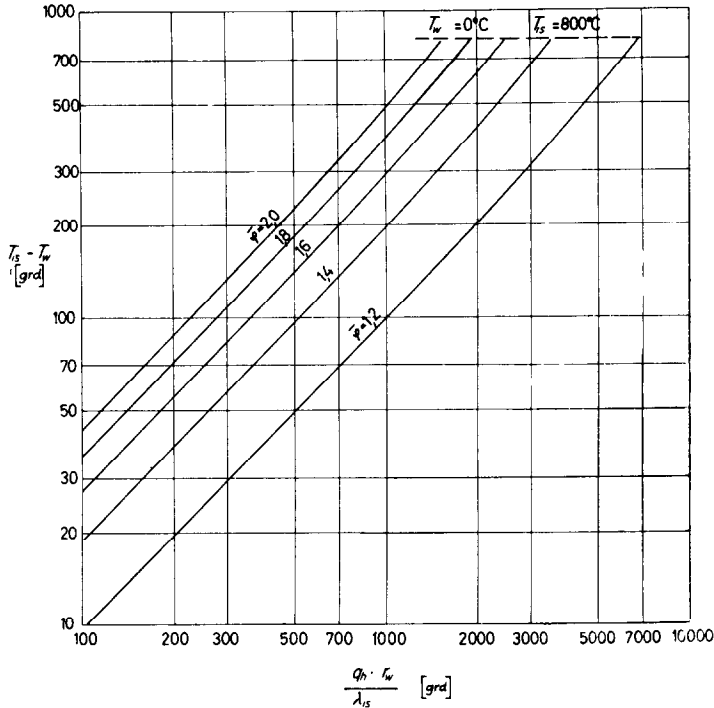


ABB. 4. Temperaturdifferenz in der Wand eines direkt elektrisch beheizten und innengekühlten Rohres aus rostfreiem Stahl (DIN-Nr. 1.4300) bei $T_{is} = 800^{\circ}\text{C}$.

Dabei ist :

$$\Delta\vartheta_{wB} = \frac{(T_{is} - T_w)_{\text{num.}} - (T_{is} - T_w)_{\text{Gl. 18}}}{(T_{is} - T_w)_{\text{num.}}} \quad (33)$$

Für kleinere Belastungen ist $\Delta\vartheta_{wB} < \Delta\vartheta_{wA}$ (bei nicht zu grossen $\bar{\varphi}$ -Werten). Für grössere Werte von $q_h r_w / \lambda_{is}$ und grössere Radienverhältnisse $\bar{\varphi}$ ist jedoch $\Delta\vartheta_{wB} > \Delta\vartheta_{wA}$. Die Grenze, an der $\Delta\vartheta_{wB} = \Delta\vartheta_{wA}$ wird, ist in Abb. 6 durch die dicken Querstriche an den einzelnen Kurvenscharen angezeigt. Nur im Bereich der ausgezogenen Linien ist $\Delta\vartheta_{wB} < \Delta\vartheta_{wA}$ bzw. liegt das technisch interessierende Gebiet. Man erkennt, dass der Anwendungsbereich der Näherungslösung (Gl. 18) geringer ist als der der Näherungslösung (Gl. 27). Bedenkt man noch, dass die relativen Abweichungen $\Delta\vartheta_{wA}$ in Abb. 5 normalerweise unter 5 Prozent bleiben, bringt die komplizierte und für die Auswertung zeitraubende Gl. (18) zur Berechnung des Tempera-

turabfalls ($T_{is} - T_w$) in der Wand gegenüber der einfachen Beziehung (Gl. 27) keine Vorteile.

EINFLUSS DES SKINEFFEKTES AUF DIE TEMPERATURVERTEILUNG IN DER BEHEIZTEN ROHRWAND*

Aus messtechnischen Gründen wird an die Versuchsstrecke meist eine Gleichspannung angelegt. Sofern der Heizstrom durch Gleichrichtung eines Wechsel- oder Drehstromes erzeugt wird, weist er stets einen gewissen Grad von Restwelligkeit auf, die die Ursache für das Auftreten des Skineffektes darstellt. Das bedeutet gegenüber der Beheizung mit idealem Gleichstrom eine veränderte Stromdichteverteilung, geänderte Verteilung der Wärmequellen und somit eine Änderung der Temperaturverteilung in der Rohrwand der Mess-Strecke.

* Der Abschnitt über den Skineffekt wurde im Rahmen eines EURATOM-Praktikums von C. F. Baasel bearbeitet.

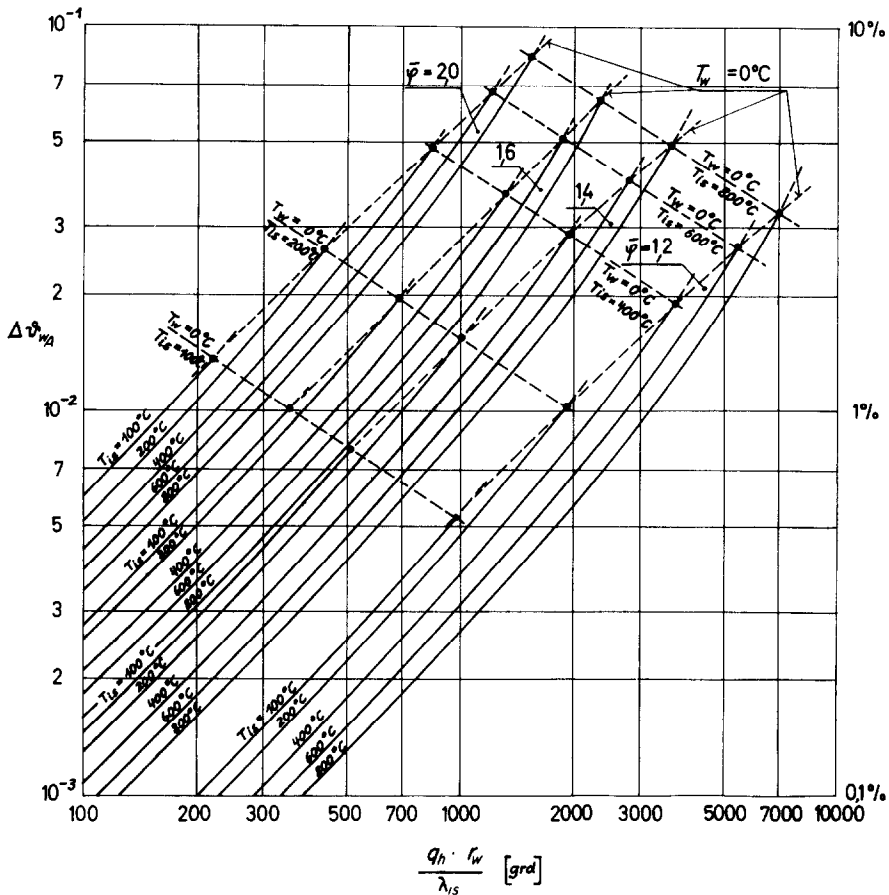


ABB. 5. Relative Abweichungen $\Delta\theta_{wA}$ (Gl. 32) für ein direkt elektrisch beheiztes und innengekühltes Rohr aus rostfreiem Stahl (DIN-Nr. 1.4300).

Diese Temperaturverteilung in einem direkt elektrisch beheizten Körper ist aber von der Verteilung der Wärmequellen $W(r)$ abhängig, die für einen unendlich langen, geraden, isolierten und homogenen Leiter von Kreisquerschnitt mit temperaturunabhängigem spezifischem Widerstand proportional dem Quadrat der Stromdichte $\psi(r)$ ist:

$$W(r) = \rho \cdot \psi(r)^2 \quad (34)$$

Untersucht man zunächst den Einfluss des Skin-effektes bei reinem sinusförmigem Wechselstrom in diesem kreisförmigen Leiter, so ergibt sich bei Anwendung des Durch-

flutungs- und Induktionsgesetzes die Differentialgleichung der Stromdichte:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = i k^2 \cdot \psi \quad (35)$$

worin $\psi(r, t) = \psi(r) e^{i\omega t}$ die Stromdichte [A/m^2], ω die Kreisfrequenz, r und t die Radius- und Zeitkoordinate und—im MKSA-Mass-System—die Konstante $k^2 = \mu_r \cdot \omega \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} / \rho$ bedeuten. μ_r ist die relative Permeabilität, die für die normalen Materialien (rostfreier Stahl, Kupfer, Aluminium) gleich Eins ist [5].

Für den Kreiszyylinder mit den Radien r_a und r_i ergibt sich mit den Randbedingungen, dass an

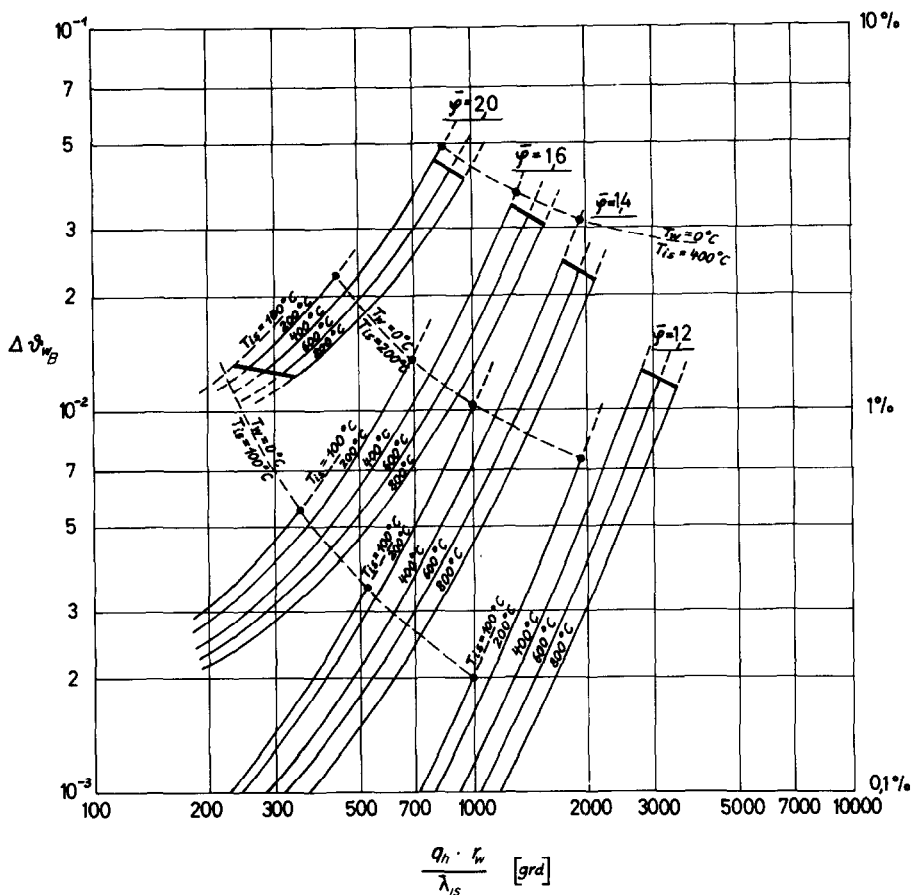


ABB. 6. Relative Abweichungen $\Delta \theta_{wB}$ (Gl. 33) für ein direkt elektrisch beheiztes und innengekühltes Rohr aus rostfreiem Stahl (DIN-Nr. 1.4300).

den Leiteroberflächen keine Wirbelströme induziert werden, als Lösung der Differentialgleichung (35):

$$\psi(r) = \psi_0 \cdot h(r_a; r_i; k; r) \quad (36)$$

mit: ψ_0 = Stromdichte am Aussenrand ($r = r_a$) und

$$h = \frac{J_0(i^{3/2} \cdot kr) \cdot K_1(i^{1/2} \cdot kr_i) - iK_0(i^{1/2} \cdot kr) \cdot J_1(i^{3/2} \cdot kr_i)}{J_0(i^{3/2} \cdot kr_a) \cdot K_1(i^{1/2} \cdot kr_i) - iK_0(i^{1/2} \cdot kr_a) \cdot J_1(i^{3/2} \cdot kr_i)} \quad (37)$$

Die Stromdichte ψ_0 an der Rohraussenwand bei zeitlich veränderlichem Spannungsabfall am Leiter stellt sich konstant über den ganzen

Leiterquerschnitt ein, wenn eine Gleichspannung angelegt wird, deren Grösse gleich dem Effektivwert der angelegten Wechselspannung ist. Die Verteilungsfunktion h für die Stromdichte $\psi(r)$ ist eine komplexe Funktion und gegeben durch die Besselfunktionen J_0 und J_1 erster Art und nullter bzw. erster Ordnung und die Besselfunktionen K_0 und K_1 zweiter Art und nullter bzw. erster Ordnung. Aus den Randbedingungen folgt, dass an der Rohrinne wand ($r = r_i$) $|h|$ und $Re-h$ ein Minimum, der Phasenwinkel α und $Im-h$ ein Maximum besitzen und dass an der Rohraussenwand ($r = r_a$) $h = 1$, d. h. $|h| = Re-h = 1$ und $Im-h = \alpha = 0$ ist. Für die Wärmequellenverteilung über den

Rohrquerschnitt ist nach Gl. (34) und (36) das Quadrat des Betrages von h ($|h|^2$) massgebend. Der maximale Einfluss des Skineffektes auf die Temperaturverteilung in der Rohrwand wird durch das Verhältnis g der Stromdichten an Innen- und Aussenfläche des Leiters bestimmt:

$$g(r_a; r_i; k) = \frac{\psi_{r=r_i}}{\psi_0} = h_{\text{Min.}} \quad (38)$$

Aus diesem Grunde ist der Verlauf der Stromdichte $\psi(r)$ weniger interessant als die Bestimmung von g in Abhängigkeit von den Rohrdimensionen, des Rohrmaterials und der zeitlichen Abhängigkeit der Ströme.

Für einige in der Tabelle 2 aufgeführte Rohre wurden der Betrag und das Quadrat des Betrages von g für rostfreien Stahl, Aluminium und Kupfer in Abhängigkeit der Grösse k berechnet und in Abb. 7 als Funktion der Frequenz dargestellt. Für die hier interessierenden Materialien ist $\mu_r = 1$ und der spezifische

Widerstand ρ vorgegeben. Damit bleibt in k nur noch die Frequenz variabel, und man kann für die verschiedenen Materialien unterschiedliche Frequenzmass-Stäbe angeben. Man erkennt aus Abb. 7, dass für dünnwandige Rohre (10/12; 10/14) bei praktisch vorkommenden Frequenzen und reinem Wechselstrom der Einfluss des Skineffektes auf die Temperaturverteilung in der Rohrwand (repräsentiert durch $|g|^2$) vernachlässigbar ist. Die Rohrgeometrien haben einen wesentlich grösseren Einfluss auf den Skineffekt als die Frequenz f . Dies ist aus Gl. (37) verständlich: Während die Rohrradien r_a und r_i linear in das Argument der Besselfunktionen eingehen, geht die Frequenz (über die Grösse k) mit der Wurzel ein. Eine weitere zahlenmässige Auswertung, die hier nicht dargestellt werden soll, zeigt, dass der Einfluss des Innenradius r_i auf $|g|^2$ im Verhältnis zum Einfluss der Wandstärke ($r_a - r_i$) auf $|g|^2$ sehr gering ist. Bei gleicher Wandstärke vergrössert sich der Skineffekt mit wachsendem Innenradius.

Es soll betont werden, dass diese Berechnungen nur für reinen sinusförmigen Wechselstrom gelten. Die Bestimmung des Einflusses des Skineffektes bei Gleichstrom mit Restwelligkeit soll im folgenden behandelt werden:

Die Temperaturverteilung in der direkt elektrisch beheizten Rohrwand wird von der Wärmequellenverteilung etwa proportional beeinflusst. Will man nun untersuchen, wie der Skineffekt das Temperaturprofil in der Rohrwand verändert, genügt es also, dessen Einfluss auf die Wärmequellenverteilung zu betrachten, die nach Gl. (34) proportional dem Quadrat der Stromdichte $\psi(r)$ ist. Diese Stromdichte ist messtechnisch nicht erfassbar und man muss sie durch den messbaren Spannungsabfall ΔU am Leiter der Länge Δx ausdrücken.

Für die elektrische Feldstärke gilt:

$$E(r) = \rho \cdot \psi(r) = \rho \cdot \psi_0 h(r) = E_0 \cdot h(r) \quad (39)$$

Mit:

$$E_0 = \rho \cdot \psi_0$$

Da an der Rohraussenwand keine Wirbelströme induziert werden, folgt aus den Rand-

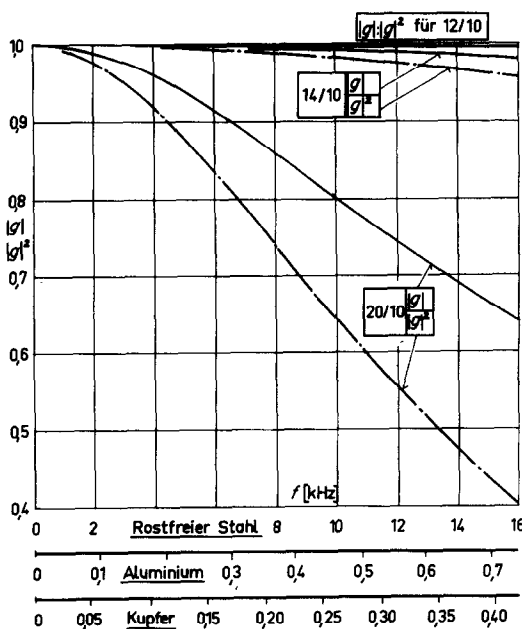


ABB. 7. Verhältnis der Stromdichten ($|g|$) und Wärmeentwicklungen ($|g|^2$) an der Innen- und Aussenseite eines mit reinem Wechselstrom beheizten Rohres als Funktion der Frequenz (die Zahlen an den Kurven bedeuten den Aussen- und Innendurchmesser).

bedingungen für die Differentialgleichung (35), dass $h(r = r_a) = 1$ ist. Damit gilt für die Leiterausenfläche:

$$E_0 = \frac{\Delta U}{\Delta x} \quad (40)$$

wobei ΔU den gemessenen Spannungsabfall längs Δx bedeutet, der für Energiebetrachtungen (Wärmequellen) der Effektivwert ΔU_{eff} der Spannung sein muss. Damit ergibt sich für die Wärmequellenverteilung:

$$W(r) = \frac{\Delta U_{\text{eff}}}{\rho \Delta x^2} |h(r)|^2 \quad (41)$$

Diese Beziehung gilt für eine Frequenz. Ist irgendeine beliebige Spannung, beispielsweise eine Gleichspannung mit Restwellen, gegeben, so muss die Spannungskurve $\Delta u(t)$ durch harmonische Analyse in ihre Fourierkomponenten zerlegt werden:

$$\Delta u(t) = \Delta U_0 + \sqrt{2} \sum_{v=1}^{\infty} [\Delta U_v \cdot \sin(v\omega t + \alpha_v)] \quad (42)$$

worin ΔU_0 den Gleichspannungsmittelwert und ΔU_v den Effektivwert der einzelnen Komponenten mit den Frequenzen $f_v = (\omega \cdot v)/2\pi$ und α_v die Phasenwinkel bedeuten. Die Grundfrequenz $\omega/2\pi$ errechnet sich aus der Periode τ der Spannungskurve. Aus Gl. (41) wird dann:

$$W(r) = \frac{\Delta U_0^2}{\rho \Delta x^2} \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \right)^2 |h_v(r)|^2 \right] \quad (43)$$

Der Unterschied ΔW zwischen der aus Messwerten berechneten Wärmequellenverteilung $W_0 = \Delta U_{\text{gem}}^2/\rho \cdot \Delta x^2$ und der exakten Wärmequellenverteilung $W(r)$ ist ein Mass für den systematischen Fehler bei der Bestimmung des Temperaturprofils in der Rohrwand.

$$\Delta W = W_0 - W(r) = \frac{\Delta U_{\text{gem}}^2}{\rho \Delta x^2} - \frac{\Delta U_0^2}{\rho \Delta x^2} \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \right)^2 |h_v(r)|^2 \right] \quad (44)$$

Je nach dem Messverfahren ergibt sich ein Wert von ΔU_{gem} : Für ein Drehspulinstrument (lineare Skala) ist $\Delta U_{\text{gem}} = \Delta U_0 =$ Mittelwert der zeitlich veränderlichen Spannung, und für ein Dreheiseninstrument (quadratische Skala) ist

$$\Delta U_{\text{gem}} = \Delta U_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\sum_{v=0}^{\infty} \Delta U_v^2 \right)}$$

dem Effektivwert der zeitlich veränderlichen Spannung. Man erkennt aus Gl. (44), dass bei Verwendung eines Drehspulinstrumentes zur Messung des angelegten Spannungsabfalls längs der Rohrlänge Δx ($\Delta U_{\text{gem}} = \Delta U_0$) der Fehler ΔW negativ wird, da die von den Oberwellen herrührende Leistung in W_0 nicht berücksichtigt wird. Bei Verwendung eines Dreheiseninstrumentes ($\Delta U_{\text{gem}} = \Delta U_{\text{eff}}$) hingegen wird in W_0 die tatsächliche Wärmeentwicklung durch die Oberwellen mit berücksichtigt, nicht jedoch der Skineffekt, womit ΔW positiv wird. In den meisten Fällen dürften Drehspulinstrumente verwendet werden, wofür gilt:

$$\frac{\Delta W}{W(r)} = - \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \right)^2 |h_v(r)|^2}{1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \right)^2 |h_v(r)|^2} \quad (45)$$

Für praktische Fälle ist die Wärmeentwicklung durch die Oberwelligkeit meist sehr gering, und absolut genommen wird der relative Fehler am grössten, wenn $|h_v(r)|$ seinen Maximalwert Eins hat:

$$\left| \frac{\Delta W}{W} \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \right)^2 \quad (46)$$

Für den für die Versuche verwendeten hexaphasigen Gleichrichter von 300 kW Leistung ergab die harmonische Analyse einer Spannungskurve die in Tabelle 1 angegebenen Komponenten. Mit Gl. (46) wird dafür:

$$\left| \frac{\Delta W}{W} \right| \leq 1,975 \cdot 10^{-3}$$

Tabelle 1. Komponenten der harmonischen Analyse einer Spannungskurve des für die Versuche verwendeten hexaphasigen Gleichrichters

v	$\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \cdot 100$	v	$\frac{\Delta U_v}{\Delta U_0} \cdot 100$
0	1,00	7	0,17
1	0,97	8	0,24
2	0,69	9	0,37
3	4,17	10	0,07
4	0,38	11	0,13
5	0,33	12	0,15
6	0,65	Wietere Komponenten sind verschwindend klein	

Dieser Fehler liegt aber unterhalb der Messgenauigkeit der verwendeten Messinstrumente und kann somit vernachlässigt werden.

VERSUCHSANLAGE

Das ursprüngliche Ziel der vorliegenden Untersuchungen war die Erprobung des beschriebenen Messverfahrens und die Anwendung der Lösungen der Differentialgleichung zur Berechnung der Temperatur der gekühlten Oberfläche.

Zu diesem Zweck wurden Rohre verschiedener Geometrien und Materialien untersucht, deren charakteristische Werte in der Tabelle 2 zusammengestellt sind. Auf jeder Versuchsstrecke (Abb. 1) waren Spannungsabgriffe (durch Kondensatorentladung) stumpf aufgeschweisst, die aus Drähten von 0,2 mm \varnothing aus gleichem Material wie das Versuchsrohr bestanden. Damit vermeidet man zusätzliche Thermospannungen an den Abgriffstellen, die die Messung der Differenzspannung ΔU zwischen zwei benachbarten Abgriffen verfälschen würden. Zwischen je zwei Abgriffen waren in der Mitte Thermoelemente elektrisch isoliert auf den Rohren befestigt. Die Schichtdicke der Isolation war geringer als 0,1 mm. Die auswechselbaren Mess-Strecken waren mit 50 mm dicken Isolierschalen gegen Wärmeverluste isoliert und gegenüber einem geschlossenen Wasserkreislauf durch Teflonscheiben elektrisch isoliert. Es wurde vollentsalztes Wasser verwendet. Vor und hinter der

Mess-Strecke wurde die Mischtemperatur im Wasserstrom gemessen. Die umlaufende Wassermenge, die mit Ventilen und einer Bypass-Leitung eingestellt werden konnte, wurde mit auswechselbaren geeichten Blendenstrecken bestimmt. Zur Zirkulation des Wassers diente eine Kreiselpumpe von maximal 15 m³/h Fördermenge bei 30 at Druckerhöhung. Die von der Pumpe und der Versuchsstrecke in das Wasser einfallende Wärmemenge konnte in einem Doppelrohrkühler von maximal 300 kW Leistung abgeführt werden. Vor jeder Messung wurden der mittlere Aussen- und Innendurchmesser der kalibrierten Versuchsrohre durch Messung mit einem Mikrometer bzw. durch Ausliteration mit Wasser auf 0,05 mm genau ermittelt. Die Stoffwerte des Rohrwandmaterials, d. h. seine elektrische Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit sowie deren Abhängigkeiten von der Temperatur, sind in der Tabelle 2 zusammengestellt. In Vorversuchen wurden an Probestücken der verwendeten Versuchsrohre die mittleren Rauigkeiten bestimmt.

Die Messungen wurden in folgenden Bereichen durchgeführt:

Reynoldssche Zahl:

$$20000 < Re = \frac{4Q_m}{\pi d\mu} < 640000$$

Prandtlsche Zahl:

$$2 < Pr < 5,5$$

Pr-Zahl-Verhältnis:

$$1 < (Pr/Pr_w) < 5$$

Wärmestromdichte:

$$30 < q_h < 450 \text{ W/cm}^2$$

mittlere Wassertemperatur:

$$30 < T_b < 80^\circ\text{C}$$

mittlere Wandinnentemperatur:

$$30 < T_w < 200^\circ\text{C}$$

Durchmesserverhältnis:

$$1,2 < (\bar{\varphi} = d_{is}/d_w) < 2,0$$

Wärmeleitfähigkeit des Rohrwandmaterials:

$$15 < \lambda_R < 380 \text{ W/m grd}$$

Der Systemdruck in der Mess-Strecke betrug etwa 20 bar, so dass mit Sicherheit Oberflächen-sieden ausgeschaltet wurde.

Tabelle 2. Daten der untersuchten Mess-Strecken

Bezeichnung	RS 17/14	RS 12/10	RS 14/10	RS 20/10	RS 25/23	KU 12/10	AL 12/10
Material	Rostfreier Stahl						
Werkstoff-Nummer	1.4300	1.4541	1.4541	1.4541	1.4300	—	—
Durchmesser d_w/d_i [mm]	16,95/14,14	12,05/9,98	14,10/10,00	20,08/19,98	25,05/22,95	12,05/9,92	12,05/10,03
gesamte beheizte Messlänge [mm]	1200	900	1200	800	800	1500	1500
Länge der Anlaufstrecke [mm]	400	550	400	200	800	250	250
Länge der Auslaufstrecke [mm]	400	550	400	200	100	250	250
Anzahl der Thermolemente	10	10	10	10	12	10	10
Anzahl der Spannungsabgriffe	12	12	12	12	14	12	12
Abstand zwischen 2 Spannungsabgriffen Δx [mm]	100	75	100	66,7	variabel	125	125
geometr. Mittelwert der inn. Rauigkeit $[\mu]$	2,80	0,75	1,70	nicht gem.	2,90	0,70	0,80
Wärmeleitfähigkeit λ_{100} bei 100°C [W/m grd]	15,7†	16,0*	16,0*	16,0*	15,7†	381†	205†
Temperaturkoeff. der Wärmeleitfähigkeit β_{100} [1/grd]	$0,93 \cdot 10^{-3}$	$1,085 \cdot 10^{-3}$	$1,085 \cdot 10^{-3}$	$1,085 \cdot 10^{-3}$	$0,93 \cdot 10^{-3}$	$-0,132 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{-3}$
spezif. elektr. Widerstand ρ_{100} bei 100°C [$\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$]	0,84†	0,819*	0,819*	0,819*	0,84*	0,022†	0,039†
Temperaturkoeff. des elektr. Widerstandes ϵ_{100} [1/grd]	$0,81 \cdot 10^{-3}$	$0,855 \cdot 10^{-3}$	$0,855 \cdot 10^{-3}$	$0,855 \cdot 10^{-3}$	$0,81 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$

* Eigene Messungen nach Kohrausch-Methode

† Aus Tabellenbüchern (Mittelwerte)

$$\lambda_T = \lambda_{100} \left[1 + \beta_{100}(T - 100) \right]$$

$$\rho_T = \rho_{100} \left[1 + \epsilon_{100}(T - 100) \right]$$

Bei der Messung örtlicher Wärmeübergangszahlen im thermischen Anlaufgebiet liegen die Mess-Stellen in unmittelbarer Nähe der Stromzuführungen zu der Mess-Strecke. Dann muss für eine sehr gleichmässige Zuführung des Stromes längs des Rohrfanges gesorgt werden, da sonst durch lokale Überhitzungseffekte in der Nähe dieser Zuführungen erhebliche Messfehler auftreten können. Um dies ausschliessen zu können, wurden bei diesen Messorten in unmittelbarer Nähe des Beginns der Beheizung jeweils mehrere Thermoelemente in gleichem Abstand x umfangversetzt angebracht. Weiterhin können in diesem Gebiet in axialer Richtung erhebliche Temperaturgefälle auftreten, die die elektrisch erzeugte Wärme sowohl in radialer als auch in axialer Richtung fliessen lassen. Die angegebenen Rechnungen über den Temperaturabfall in der Wand gelten dann natürlich nicht mehr. Wie Allen und Eckert [6] mitteilten, ist allerdings schon bei einem Verhältniswert x/d von Eins die axiale Leitung vernachlässigbar. Bei $x/d = 0,5$ werden etwa 90 Prozent der entwickelten Wärme in radialer und 10 Prozent in axialer Richtung abgeführt. Beide Forscher gaben auch an, dass sich der Einfluss der rechtwinkeligen Stromumlenkung an den Stromzuführungsflanschen auf die Stromverteilung am Beheizungsanfang des Rohres auf ein Gebiet $x/d < 0,2$ beschränkt.

Auch in die unbeheizten Rohrteile vor und hinter der eigentlichen Versuchsstrecke wird durch Leitung in axialer Richtung Wärme abgeführt. Durch geeignete Wahl der Dicke der Stromzuführungen kann man erreichen, dass die in den thermisch isolierten Kupferflanschen dieser Stromzuführungen entwickelten Wärmemengen diese Verlustwärmern in die unbeheizten Rohrteile nahezu kompensieren. Dies wurde dadurch festgestellt, dass die Thermoelemente, die unmittelbar vor bzw. hinter den Stromzuführungen auf den unbeheizten Rohrteilen angebracht waren (vergl. Abb. 1), die jeweilige Bulktemperatur anzeigten, d. h. die Ein- bzw. Austrittstemperatur des Kühlmediums an der Mess-Strecke. Dadurch wurde auch gleichzeitig sicher-

gestellt, dass der thermische Einlauf am Stromzuführungsflansch begann und nicht etwa schon vorher.

ÖRTLICHE WÄRMEÜBERGANGSZAHLEN

Die Mess-Strecken RS 17/14 und RS 25/23 wurden besonders in Hinblick auf die Untersuchung örtlicher Wärmeübergangszahlen im thermodynamischen Einlaufgebiet ausgebildet. Dazu wurden die Thermoelemente und Spannungsabgriffe in sehr engem Abstand vom Beginn der beheizten Versuchsstrecke aus angebracht. Die mit dieser Anordnung gewonnenen Versuchsergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt. Die Stoffwerte in den Nusseltschen und Reynoldsschen Zahlen sind bei den jeweiligen örtlichen Bulktemperaturen eingesetzt worden. Die aus den Messwerten berechneten örtlichen Nusseltzahlen wurden durch das Verhältnis $(Pr/Pr_w)^{0,11}$ der örtlichen Prandtlzahlen des Wassers bei Bulk- und Wandtemperatur auf den isothermen Fall, d. h. „Wärmebelastung = 0“ reduziert. (Dieses Verhältnis ergab sich als beste Korrekturgrösse in den später erwähnten Gleichungen der mittleren Nusseltzahl für den Einfluss der temperaturabhängigen Stoffwerte des Wassers.) Damit ist:

$$Re_x = \frac{4Q_m}{\pi d_w \cdot \mu} \quad (47)$$

$$Nu_x = \frac{\alpha_x d_w}{\lambda_x (Pr_x/Pr_{wx})^{0,11}} \quad (48)$$

Die Nusseltzahl Nu_x in Abb. 8 wurde ebenfalls für diesen isothermen Fall aus dem experimentelle bestätigten Wärmeübergangsgesetz bei $x/d > 35$ mit Stoffwerten bei der örtlichen Bulktemperatur berechnet (siehe Gl. 53). Bei $x/d > 35$ kann man das Gebiet des thermischen Einlaufes als beendet ansehen. Die Messwerte bei $x/d = 0,5$ in Abb. 8 wurden im Hinblick auf axiale Wärmeleitung nach Angaben von Allen und Eckert [6] korrigiert.

Aus den Ausgleichskurven der Abb. 8 wurde für verschiedene Reynoldszahlen die Darstellung

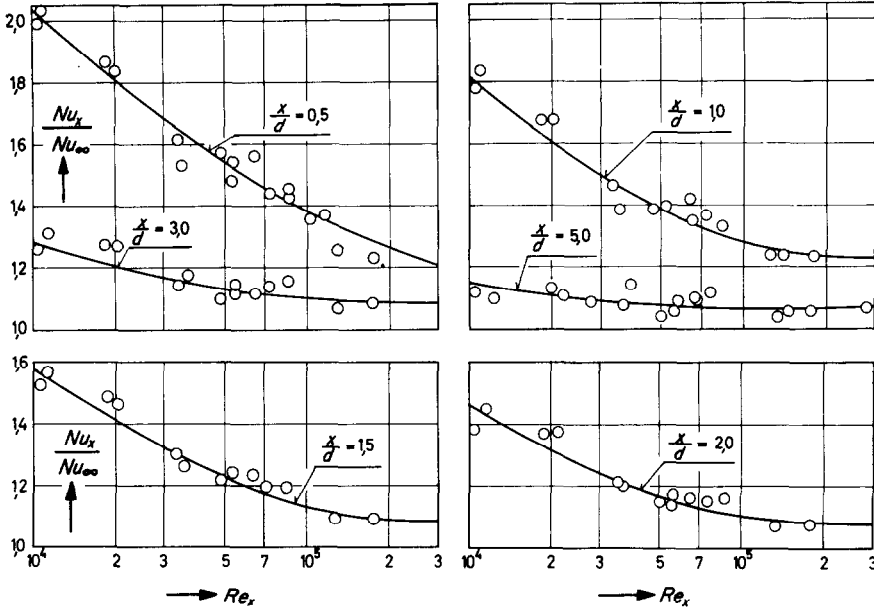


ABB. 8. Verhältnis der isothermen örtlichen Nusseltzahl Nu_x zu der bei ausgebildeter Strömung Nu_∞ als Funktion der örtlichen Reynoldszahl Re_x (Wasserströmung im Innern der Rohre RS 17/14 und RS 25/23).

der Abb. 9 gewonnen. Hier ist das Verhältnis Nu_x/Nu_∞ als Funktion des Längenverhältnisses x/d dargestellt. Bei x/d -Werten, die grösser als 2 sind, und für höhere Reynoldszahlen, stimmen unsere Messungen gut mit einer theoretischen Beziehung von Sparrow, Hallmann und Siegel [7] überein, wie man am Beispiel $Re_x = 10^5$ erkennen kann. Die theoretische Beziehung von Deissler [8] ergibt, wie auch Allen und Eckert [6] feststellten, zu niedrige Werte. Das aus Messungen von Yakovlev [9] gewonnene Verhältnis Nu_x/Nu_∞ lässt sich anhand der eigenen Messungen nur bei $Re_x = 10^4$ bestätigen, bei allen anderen Reynoldszahlen sind die eigenen Werte niedriger.

Die theoretischen Betrachtungen von Sparrow *et al.* [7] ergaben, dass bei kleinen x/d -Werten das Verhältnis Nu_x/Nu_∞ mit steigender Reynoldszahl abnimmt, dass sich aber bei $Pr = 4$ ab $x/d = 5$ bis 8 diese Tendenz umkehrt. Das bedeutet, dass mit zunehmender Länge x die örtliche Nusseltzahl Nu_x mit steigender Reynoldszahl Re_x zunächst rasch kleiner wird, dann

aber für den Ausgleich der restlichen 4 bis 5 Prozent an den Wert Nu_∞ eine grosse Reynoldszahl eine grössere Länge benötigt. Dieser Effekt

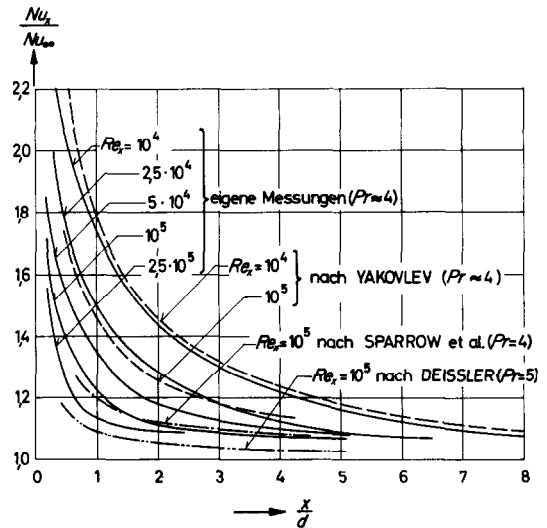


ABB. 9. Verhältnis der isothermen örtlichen Nusseltzahl Nu_x zu der bei ausgebildeter Strömung Nu_∞ als Funktion des Längenverhältnisses x/d (die ausgezogenen Kurven wurden aus Abb. 8 gewonnen).

verschiebt sich mit steigender Prandtlzahl Pr_x zu kleineren x/d -Werten, d. h. bei Flüssigkeiten mit hohen Prandtlzahlen ist der Einlauf rascher beendet als bei Stoffen mit kleinen Prandtlzahlen.

MITTLERE WÄRMEÜBERGANGSZAHLN

In den nächsten Abbildungen sind alle Messwerte, die an den 7 verschiedenen Rohren (Tabelle 2) aus rostfreiem Stahl, Kupfer und Aluminium mit den verschiedensten Wärmebelastungen jeweils in der Mitte der beheizten Mess-Strecke gewonnen wurden, als Funktion der Reynoldsschen Zahl dargestellt. Das bedeutet für die vorliegenden Untersuchungen eine Stelle $x/d > 40$, an der das Gebiet des thermischen Einlaufes als abgeschlossen betrachtet werden kann. Es zeigte sich, dass bei $x/d = 10$ der Wärmeübergang maximal nur um 1 bis 2 Prozent grösser war als bei $x/d > 40$ (vergl. Abb. 9), so dass man das thermische Einlaufgebiet als sehr klein gegenüber der ganzen beheizten Rohrlänge— $x/d > 80$ —ansehen kann.

Damit ist die in der Mess-Streckenmitte gemessene Wärmeübergangszahl sehr wenig verschieden von einer mittleren Wärmeübergangszahl der ganzen Mess-Strecke.

Für alle Stoffwerte in der Reynoldsschen, Prandtlischen und Nusseltschen Zahl wurden die Werte bei der Bulktemperatur in der Mitte der Mess-Strecke (berechnet entsprechend Gl. 3) eingesetzt bis auf die Grössen mit dem Index w oder f , die auf die Wandtemperatur oder die Filmtemperatur an dieser Stelle bezogen sind.

In Abb. 10 wurden die eigenen Messungen mit der Beziehung von Dittus und Boelter [10] verglichen:

$$\frac{Nu}{Pr^{0.4}} = 0,023 \cdot Re^{0.8} \quad (49)$$

Man erkennt, dass die Versuchspunkte um die Ausgleichskurve ($0,018 Re^{0.84}$) um ± 14 Prozent streuen und dass mit zunehmender Reynoldszahl die Abweichungen von Gl. (49) immer grösser werden. Ein Einfluss der Wärmebelastung auf die Nusseltzahl wird von Dittus

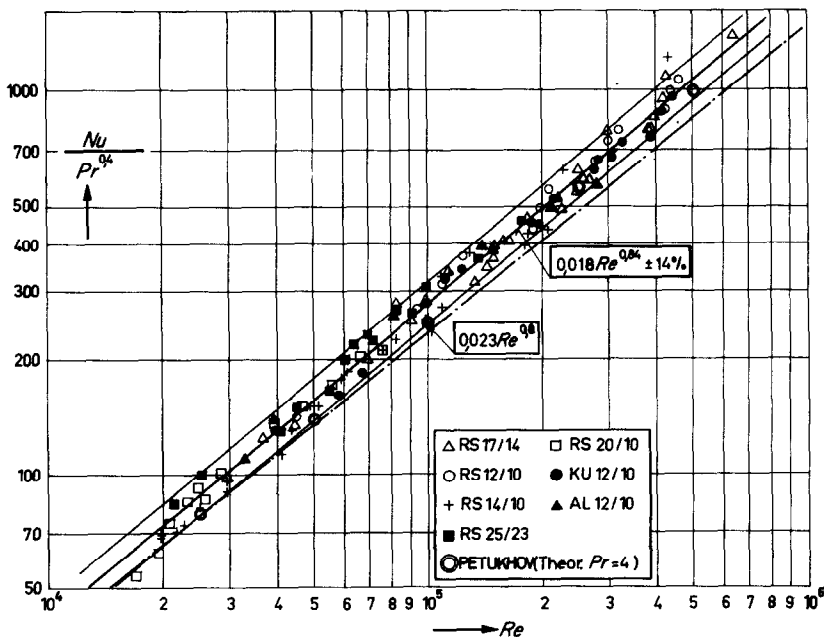


ABB. 10 Vergleich der eigenen Messungen (mittlere Nusseltzahlen) mit der Beziehung von Dittus und Boelter [10] (Gl. 49).

und Boelter nicht berücksichtigt. Dies geschieht nach der Beziehung von Hausen [11] durch das Verhältnis $(\mu/\mu_w)^{0,14}$ der kinematischen Zähigkeiten des Wassers bei Bulk- und Wandtemperatur. Der Einfluss der Prandtlzahl des Wassers bei Bulktemperatur wird von Hausen durch $Pr^{0,42}$ angegeben. In Abb. 11 wurden die eigenen Messungen mit der Beziehung von Hausen verglichen:

$$\frac{Nu}{Pr^{0,42}(\mu/\mu_w)^{0,14}} = 0,037(Re^{0,75} - 180) \quad (50)$$

(Der Faktor, der den Einfluss der Rohrlänge auf den Wärmeübergang berücksichtigt, wurde gleich Eins gesetzt!). Man erkennt aus Abb. 11 eine gegenüber Abb. 10 mit zunehmender Reynoldszahl noch stärker zunehmende Abweichung der Versuchswerte von Gl. (50). Die Streuung der Versuchspunkte um ihre Ausgleichskurve $(0,0102Re^{0,88})$ beträgt ± 15 Prozent.

In Abb. 12 wurden die eigenen Messungen nach der Methode von Deissler [8] ausgewertet, der für die Stoffwerte eine Filmtemperatur $T_f = \frac{1}{2} \cdot (T_w + T_b)$ vorschreibt. Die Reynoldssche Zahl Re_f ist mit der Bulkgeschwindigkeit v_b und der kinematischen Zähigkeit ν_f des Wassers bei Filmtemperatur gebildet. Diese Darstellungsweise, die hauptsächlich für Gase vorgeschlagen wurde, ergibt hier bei Wasser einen maximalen Streubereich von ± 22 Prozent um die Ausgleichskurve $(0,0386 Re_f^{0,95})$ bei einem unwahrscheinlichen Exponenten von 0,95 für die Reynoldssche Zahl Re_f .

Von Kirillov und Malyugin [12] wird der Einfluss der Wärmebelastung durch ein Verhältnis der absoluten Temperaturen der Bulkströmung und der Wand $\sqrt{(T_b/T_w)}$ angegeben und der Einfluss der Prandtlzahl des Wassers bei Bulktemperatur durch $Pr^{0,4}$ berücksichtigt. Wertet man die eigenen Messungen nach dieser Vorschrift aus, so ergibt sich die Darstellung der

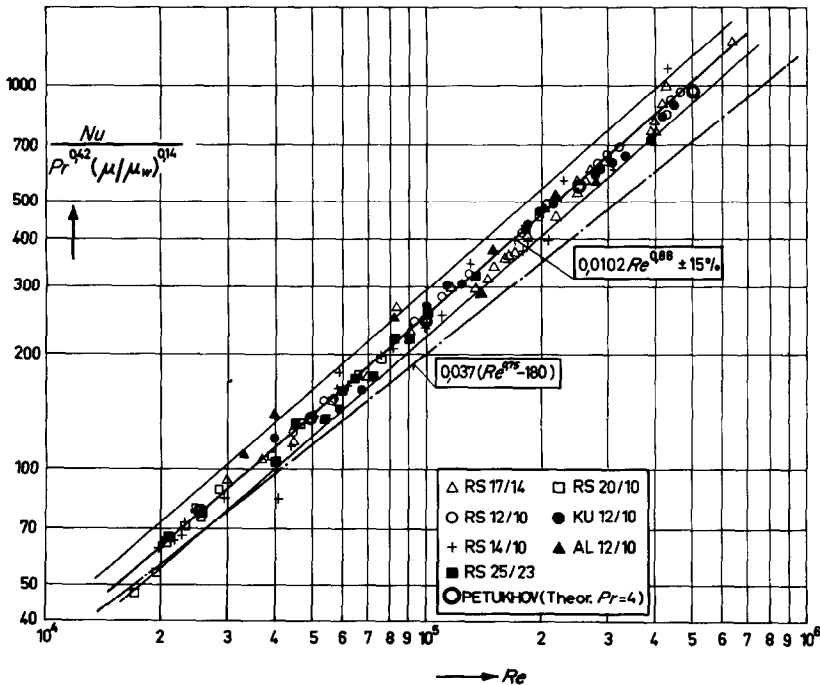


ABB. 11. Vergleich der eigenen Messungen (mittlere Nusseltzahlen) mit der Beziehung von Hausen [11] (Gl. 50).

Abb. 13. Man erkennt einen Streubereich der Versuchspunkte um ihre Ausgleichskurve ($0,030 Re^{0,8}$) von ± 22 Prozent.

Auch Auswertungen nach Colburn [13] und Sieder und Tate [14] ergeben Abweichungen der eigenen Messungen von den angegebenen Gesetzen von maximal 20 bis 30 Prozent bei Streubereichen der Versuchspunkte von etwa ± 20 Prozent.

Den geringsten Streubereich der eigenen Messungen von maximal ± 12 Prozent liefert eine Auswertung nach Yakovlev [9], die in Abb. 14 dargestellt ist. Der russische Forscher führte seine Untersuchungen an einem wasserdurchströmten Kupferrohr von 6,7 mm Innendurchmesser durch, das mit Wechselstrom beheizt und dessen Aussenwandtemperatur mit aufgelöteten Thermoelementen gemessen wurde. Der Bereich der Reynoldszahl war 20000 bis 100000, der der Prandtzahl von 3 bis 12 und der des Ver-

hältnisses der Prandtzahlen des Wassers bei Bulk- und Wandtemperatur (Pr/Pr_w) reichte von 1 bis 5. Die Wärmestromdichten waren maximal 380 W/cm^2 . Yakovlev erweiterte damit Messungen von Mikheev [15], der bei verschiedenen Kühlmedien und allerdings erheblich niedrigeren Belastungen ($Re < 10000, Pr > 0,6, 1 < Pr/Pr_w < 2, q_h < 58 \text{ W/cm}^2$) den Einfluss der temperaturabhängigen Stoffwerte und der Wärmebelastung auf die Nusseltzahl durch die Grösse $Pr^{0,43} (Pr/Pr_w)^{0,25}$ berücksichtigte. Nach dieser Darstellung streuten die Messergebnisse von Yakovlev [9] um ± 10 Prozent gegenüber ± 5 Prozent bei der von ihm vorgeschlagenen Korrekturgrösse $Pr^{0,36} (Pr/Pr_w)^{0,11}$. Er konnte seine Ergebnisse durch die Beziehung wiedergeben:

$$\frac{Nu}{Pr^{0,36} (Pr/Pr_w)^{0,11}} = 0,0277 Re^{0,8} \quad (51)$$

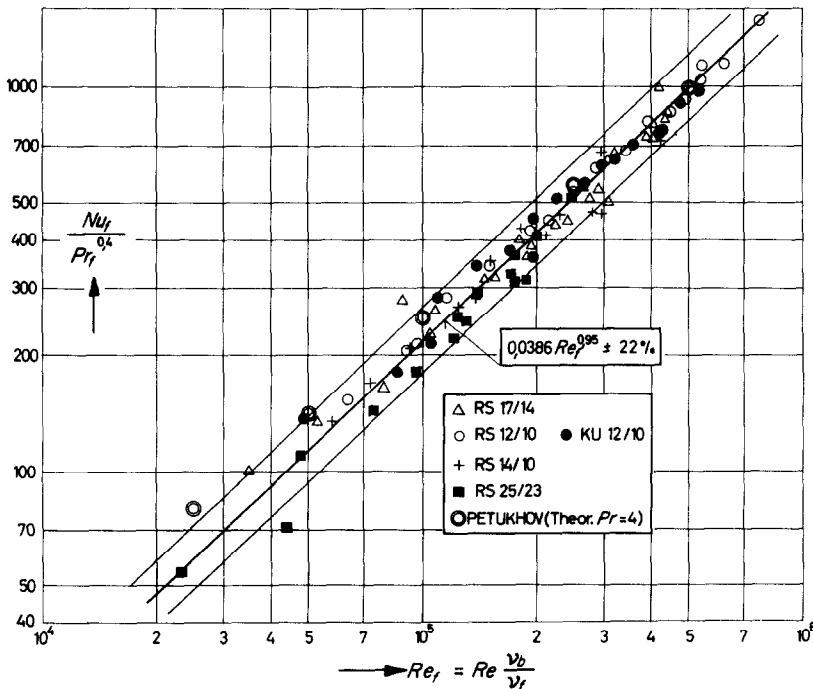


ABB. 12. Auswertung der eigenen Messungen (mittlere Nusseltzahlen) nach Deissler [8] [Filmtemperatur $T_f = 0,5(T_w + T_b)$].

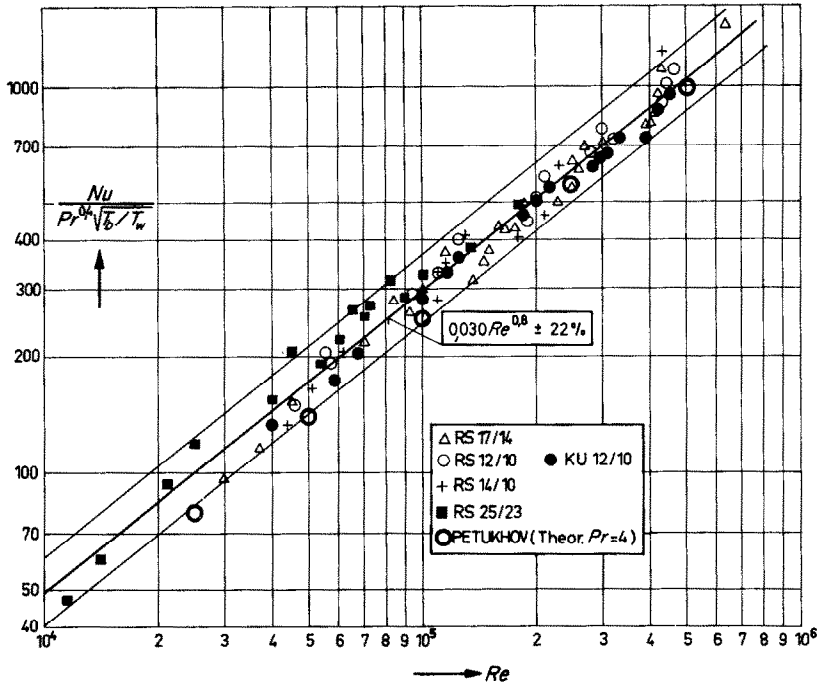


ABB. 13. Auswertung der eigenen Messungen (mittlere Nusseltzahlen) nach Kirillov und Malyugin [12].

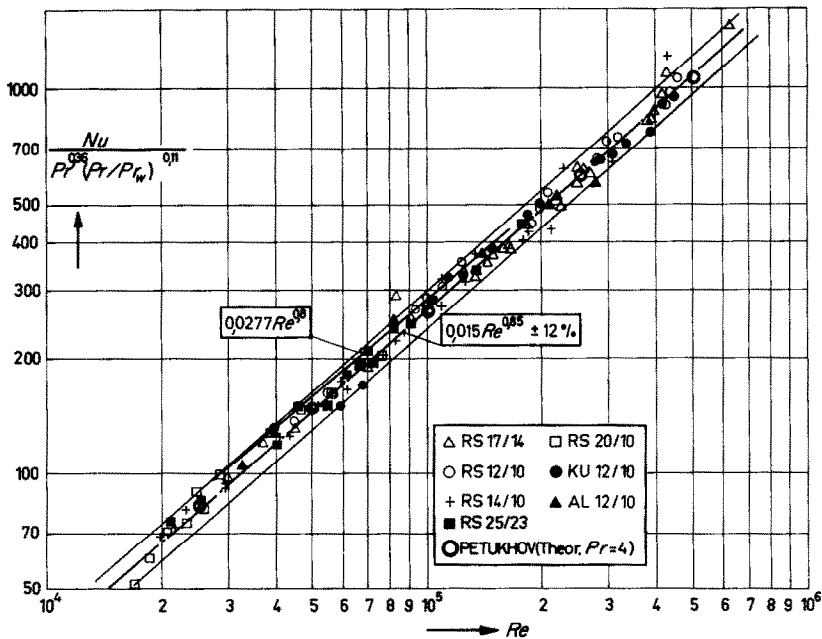


ABB. 14. Vergleich der eigenen Messungen (mittlere Nusseltzahlen) mit der Beziehung von Yakovlev [9] (Gl. 50).

Man erkennt aus Abb. 14, dass dieses Gesetz die eigenen Messungen nur in einem mittleren Reynoldsbereich befriedigend wiedergibt. Die Ausgleichskurve der Versuchspunkte ($0,015 Re^{0,85}$) zeigt eine stärkere Reynoldsbabhängigkeit (Exponent 0,85) als das Gesetz von Yakovlev (Exponent 0,80). Bergles und Rohsenow [16] stellten bei Wärmeübergangsmessungen an wasserdurchströmten Rohren in einem vergleichbaren Bereich zu den eigenen Messungen einen Einfluss der Wassermenge und damit der Temperaturdifferenz ($T_w - T_b$) zwischen Wand und Wasser fest, wenn sie ihre Ergebnisse nach Dittus-Boelter (Gl. 49) darstellten. Denselben Effekt bemerkten auch Allen und Eckert [6] für Wasser bei $Pr = 8$. Auch ihre Messergebnisse lagen um 10 bis 20 Prozent über der Beziehung nach Gl. (49). Sie stellten für das Verhältnis der Nusseltzahlen mit und ohne Wärmebelastung—die sie durch Extrapolation gewannen—eine lineare Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz ($T_w - T_b$) fest, wobei mit steigender Reynoldszahl der Effekt vergrößert wurde. Bei Wasser mit $Pr = 8$ und einer Reynoldszahl von etwa 10^5 entspricht ihre Darstellung der mit $(Pr/Pr_w)^{0,11}$. Inwieweit ihre Ergebnisse auch für andere Prandtlzahlen anwendbar sind, müsste noch systematisch geprüft werden.

Für den isothermen Fall und $Pr = 8$ fanden Allen und Eckert [6] experimentell:

$$Nu = (3,70 + 92,6 \cdot Re^{-0,269}) \cdot 10^{-4} \cdot Re \cdot Pr \quad (52)$$

In den Abb. 10 bis 14 waren zum Vergleich einige durch Doppelkreise gekennzeichnete Punkte eingetragen. Diese Punkte wurden für den isothermen Fall, d. h. „Wärmebelastung = 0“ oder $Pr/Pr_w = 1$, mit einer theoretischen Beziehung von Petukhov und Popov [17] berechnet:

$$Nu = \frac{(\zeta/8) \cdot Re \cdot Pr}{1,07 + 12,7 \sqrt{(\zeta/8)(Pr^{2/3} - 1)}} \quad (53)$$

Darin bedeutet ζ die Widerstandszahl, die sich nach Prandtl-Kármán oder für $Re < 10^5$ nach Blasius berechnen lässt.

Die Übereinstimmung der nach Gl. (53) berechneten Nusseltzahlen mit den nach Yakovlev [9] ausgewerteten eigenen Messungen ist ausgezeichnet (Abb. 14). Auch andere theoretische Beziehungen, wie die von Sparrow *et al.* [7], Nijsing [18], Deissler [8] und Martinelli [19] ergeben im Bereich der eigenen Messungen sehr gute Übereinstimmungen. Dabei wurden die meisten Beziehungen [7, 8, 17, 19] nach der üblichen Modellvorstellung turbulenter Rohrströmung, der Dreiteilung in laminare Schicht, Übergangszone und turbulente Kernströmung, und mithilfe von Austauschgrößen für Impuls und Wärme aufgestellt. Nijsing [18] stellte sich eine periodisch sich aufbauende und wieder zusammenbrechende Grenzschicht vor und berechnete mithilfe einer universellen Geschwindigkeitsverteilung und der Penetrationstheorie den Wärmeübergang. Er fand die Beziehung (gültig für $Pr > 1$):

$$Nu = \frac{(\zeta/8) Re \cdot Pr}{1,0 + 14,7 \sqrt{(\zeta/8)(Pr^{2/3} - 1)}} \quad (54)$$

Man erkennt den sehr verwandten Aufbau mit Gl. (53). Gl. (54) ergibt besonders bei sehr hohen Prandtlischen Zahlen (um 1000) eine hervorragende Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen, während sich die eigenen Messungen sowie die von Allen und Eckert [6] besser mit Gl. (53) bestätigen lassen. Will man eine übliche Potenzbeziehung der Art $Nu = C \cdot Re^m$ aufstellen, so müsste der Exponent m entsprechend der Prandtlzahl variiert werden. Im Bereich $0,7 < Pr < 10$, $10^4 < Re < 5 \cdot 10^5$ kann man näherungsweise aus Gl. (53) Werte für C und m gewinnen, die in Tabelle 3 zusammengestellt sind.

Tabelle 3. Werte von C und m gemäss der Potenzbeziehung $Nu = C Re^m$ für $0,7 < Pr < 10$ und $10^4 < Re < 5 \cdot 10^5$ (graphischer Ausgleich von Gl. 53)

Pr	0,7	1	2	4	6	8	10
$100 \cdot C$	2,69	2,85	3,14	3,55	3,66	3,93	4,08
m	0,760	0,775	0,800	0,820	0,835	0,840	0,845

Tabelle 4. Berechnete Nusseltzahlen für den isothermen Fall (Wärmebelastung = 0) für $Pr = 8$

Reynoldssche Zahl		10000	25000	50000	100000	250000	500000
Hausen	[11]	73	158	277	480	975	1630
Dittus/Boelter	[10]	84	175	305	530	1100	1910
Petukhov/Popov	[17]	92	194	345	625	1380	2520
Nijsing	[18]	84	180	322	580	1285	2360
Deissler (Integralgl.)	[8]	97	198	350	620	1350	—
Sparrow (Integralgl.)	[7]	91	196	350	630	1360	2440
$Nu = 0,0393 Re^{0,84}$		90	195	345	625	1345	2460
Allen/Eckert (exper.)	[6]	92	195	350	630	1400	2570

Für Pr gegen unendlich errechnet sich für $Re < 10^5$ (Blasius'sches Gesetz) ein Exponent $m = 0,875$. Da bei sehr hohen Reynoldszahlen die Widerstandszahl ζ gegen einen konstanten Wert zu gehen scheint, würde demnach bei sehr hohen Prandtl- und Reynoldszahlen der Exponent $m = 1$ werden. In Anbetracht dieser Tatsache kann für die Nusseltsche Zahl nicht im ganzen Bereich der Reynolds- und Prandtlzahlen ein einheitliches Potenzgesetz angegeben werden!

In der Tabelle 4 sind die mit verschiedenen Wärmeübergangsgesetzen berechneten Nusseltzahlen für den isothermen Fall ($Pr/Pr_w = 1$) und für $Pr = 8$ dargestellt worden. Man erkennt, dass die Beziehungen nach den Referenzen [6–8 und 17] praktisch gleiche Werte liefern und diese stimmen wiederum mit den eigenen Messungen ausgezeichnet überein. (vergl. Abb. 14). Die Beziehung (54) nach Ref. [18] liefert demgegenüber etwas zu kleine Werte. Die Gl. (49) nach Ref. [10] und (50) nach Ref. [11] ergeben mit steigender Reynoldszahl zunehmende Abweichungen bis maximal 35 Prozent (bei $Re = 5 \cdot 10^5$) von der Beziehung (53).

Alle angegebenen Gleichungen dürften sowohl für den Fall konstanter Wandtemperatur als auch konstanter Wärmestromdichte längs der Rohrachse gelten, wie sowohl Siegel und Sparrow [20] als auch Nijsing [18] feststellten.

SCHLUSSBETRACHTUNGEN

Bei der Bestimmung örtlicher und mittlerer Wärmeübergangszahlen von strömenden

Medien in oder an direkt elektrisch beheizten Rohren werden üblicherweise zwei Messverfahren benutzt, um die nicht messbare Temperatur T_w der gekühlten Oberfläche zu ermitteln: Im einen Falle wird die Temperatur T_{is} der ungekühlten, isolierten Rohrwandseite mit Thermoelementen gemessen und im anderen Falle die mittlere Wandtemperatur T_m aus dem gemessenen, mittleren elektrischen Rohrwandwiderstand ermittelt. Es wurde gezeigt, dass das zweite Verfahren aufgrund des Messprinzips (Thomson-Brücke) bei Rohrmaterialien mit kleinen Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes (z. B. rostfreier Stahl) zu Fehlern führen kann, wenn man örtliche Messungen an Rohren durchführen will.

Die Berechnung der Temperaturdifferenz zwischen den gemessenen Temperaturen T_{is} oder T_m und der Temperatur T_w der gekühlten Wand erfolgte mithilfe der exakten Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Wärmequellen und temperaturabhängigen Stoffwerten des Wandmaterials. Dabei zeigte sich, dass im technisch interessierenden Bereich— $100 \leq T_{is} \leq 800^\circ\text{C}$; $T_w \geq 0^\circ\text{C}$; Radienverhältnisse $\bar{\varphi} < 1,4$ —eine vereinfachte Lösung, die von einer konstanten, mittleren Wärmeleitfähigkeit des Rohrwandmaterials ausgeht, nur Abweichungen von maximal 5 Prozent von der exakten Lösung (die einen Digitalrechner IBM 7090 erfordert) liefert. Da die Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials bestenfalls mit ± 5 Prozent Genauigkeit bekannt ist, kann man für normale Fälle immer mit der vereinfachten Lösung (Gl. 27 oder 28)

rechnen. Bei extremen Belastungen und grossen Radienverhältnissen können Korrekturwerte einem Diagramm (Abb. 5) entnommen werden.

Eine besondere Rechnung ergab, dass bei Beheizung der Mess-Strecke mit Wechselstrom oder Gleichstrom mit Restwelligkeit der Skin-effekt bei praktisch vorkommenden Frequenzen und Rohrabmessungen einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Temperaturverteilung in der Rohrwand hat.

Die Brauchbarkeit des Verfahrens, bei dem die Temperatur T_{is} der ungekühlten Rohrwandseite gemessen wird, und des Auswertungsverfahrens wurde anhand von Messungen an wasserdurchströmten Rohren verschiedener Geometrien ($1,2 < \bar{\varphi} < 2,0$) und Rohrwandmaterialien (rostfreier Stahl, Kupfer, Aluminium) bis zu Wärmestromdichten von 450 W/cm^2 und Reynoldsschen Zahlen von 640000 nachgewiesen. Es zeigte sich, dass im untersuchten Bereich ($20000 < Re < 640000$; $2 < Pr < 5,5$; $1 < Pr/Pr_w < 5$) der Einfluss der temperaturabhängigen Stoffwerte und des Wärmestroms auf die Nusseltsche Zahl am besten durch die Grösse $(Pr/Pr_w)^{0,11}$ wiedergegeben werden konnte. Dabei sind alle Stoffwerte des Wassers auf die (mittlere bzw. örtliche) Bulktemperatur bezogen bis auf die Prandtlsche Zahl Pr_w , die bei der (mittleren bzw. örtlichen) Wandtemperatur einzusetzen ist. Die eigenen Messungen wurden am besten durch eine theoretische Beziehung (Gl. 53) von Petukhov *et al.* [17] wiedergegeben, so dass für die Berechnung von Wärmeübergangszahlen bei voll ausgebildeter turbulenter Strömung in Rohren gelten dürfte:

$Nu =$

$$\frac{(\zeta/8) \cdot Re \cdot Pr}{1,07 + 12,7 \sqrt{(\zeta/8)(Pr^{2/3} - 1)}} \left(\frac{Pr}{Pr_w} \right)^{0,11}$$

wobei die Widerstandszahl ζ nach Prandtl-Kármán berechnet werden kann (für $Re < 10^5$ auch nach Blasius).

Mitarbeit an den Untersuchungen gedankt. Gleichfalls möchten die Autoren den Herren E. de Clercq, H. Hoffmann und M. Fleischer für die Durchführung der Messungen danken.

LITERATUR

1. G. GRASS, Oberflächentemperaturmessung an Blechen und Rohren bei hohen Wärmestromdichten. *Allg. Wärmetechn.* **9**, 3 (1958/9).
2. H. GRÖBER, S. ERK und U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3. Aufl., p. 46. Springer, Berlin (1957).
3. H. GRÖBER, S. ERK und U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3. Aufl., p. 130. Springer, Berlin (1957).
4. R. GERBER, Sur le calcul de l'écart de température dans la paroi d'un canal circulaire, chauffé électriquement, lorsque les conductivités électriques et thermiques varient avec la température. *Rapport CEA*. No. 1266 (1959).
5. H. LANDOLT und R. BÖRNSTEIN, Zahlenwert und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik. IV. Band: Technik, 3. Teil: Elektrotechnik, Lichttechnik, Röntgentechnik. 6. Aufl. Springer, Berlin (1957).
6. R. W. ALLEN und E. R. G. ECKERT, Friction and heat-transfer measurements to turbulent pipe flow of water ($Pr = 7$ and 8) at uniform wall heat flux, *J. Heat Transfer* **86**, 301–310 (1964).
7. E. M. SPARROW, T. M. HALLMANN und R. SIEGEL, Turbulent heat transfer in the thermal entrance region of a pipe with uniform heat flux, *Appl. Scient. Res.* **A7**, 37–52 (1968).
8. R. G. DESSLER, Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, *NACA TN* 3145 (1854).
9. V. V. YAKOVLEV, Local and mean heat-transfer for a turbulent flow of non-boiling water in a tube with high heat loads, *Transl. from Atomnaya Energiya* **8** (3) 250–252 (1960); Sh. auch *Kernenergie* **3**, 1098–1099 (1960).
10. F. W. DITTUS und L. M. K. BOELTER, *Univ. Calif. Publ.* **2**, 443 (1930); durch W. H. MCADAMS, *Heat Transmission*, Vol. 3, p. 219. McGraw-Hill, New York (1954).
11. H. HAUSEN, Neue Gleichungen für den Wärmeübergang bei freier und erzwungener Strömung, *Allg. Wärmetechn.* **9**, 75–79 (1959).
12. V. V. KIRILLOV und Y. S. MALYUGIN, Local heat transfer during the flow of a gas in a pipe at high temperature differences. *Transl. in High Temperature* **1** (2), 227–231 (1963).
13. A. P. COLBURN, A method of correlating forced convection heat transfer data and a comparison with fluid friction, *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs* **29**, 174 (1933).
14. E. N. SIEDER und G. E. TATE, Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, *Ind. Chem. Engng* **28**, 1429 (1936).
15. M. A. MIKHEEV, Heat transfer in turbulent flow of a fluid in tubes, *Transl. from Izvest. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk* **10**, 1448 (1952).

Dem Leiter der Abteilung für Wärmeübertragung des Gemeinsamen Euratomforschungszentrums in Ispra/Italien, Herrn Dr. G. Grass sei an dieser Stelle für die Förderung und

16. A. E. BERGLES und W. M. ROHSENOW, The influence of temperature difference on the turbulent forced-convection heating of water, *J. Heat Transfer* **84**, 268–269 (1962).
17. B. S. ПЕТУКHOV und V. N. ПОПОВ, Theoretical calculation of heat exchange and frictional resistance in turbulent flow in tubes of an incompressible fluid with variable physical properties. Transl. in *High Temperature* **1**, 69–83 (1963).
18. R. NIJSING, Diffusional phenomena associated with transfer of momentum, heat and mass in turbulent pipe-flow. Euratom Report *EUR 293e* (1963).
19. R. C. MARTINELLI, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **69**, 947–959 (1947); durch W. H. MCADAMS, *Heat Transmission*, Vol. 3, pp. 210–212. McGraw-Hill, New York (1954).
20. R. SIEGEL und E. M. SPARROW, *J. Heat Transfer* **82**, 152 (1960), durch Ref. [6].

Abstract—In determining the local or mean heat-transfer coefficient for flow in or parallel to an electrically heated tube, two procedures are commonly used for obtaining the temperature T_w of the surface in contact with the fluid. In the first, the temperature T_{is} of the surface not in contact with the fluid is measured by thermocouple; in the second, the mean wall temperature T_m is calculated from the measured electrical resistance of the tube. It is shown that the second procedure may lead to error if local determinations are intended. The temperature differences $T_{is} - T_w$ or $T_m - T_w$ are calculated from the solution of the heat-conduction equation with heat sources, assuming that the properties of the wall material are temperature-dependent. For the region of interest, it is shown that a simplified solution, based on constant mean properties, gives results which deviate only slightly from the 'exact' solution obtained with an IBM 7090 computer. The usefulness of the thermocouple method (T_{is}) and of the computing procedure is shown from measurements on tubes of various geometries and wall materials, with heat fluxes up to 450 W/cm². In the region studied (20000 < Re < 640000, 2 < Pr < 5.5, 1 < Pr/Pr_w < 5), the influence of the temperature-dependent properties of water and the heat flux on the Nusselt number can be given by the factor $(Pr/Pr_w)^{0.11}$.

Résumé—Durant l'évaluation des coefficients locaux et moyens de transfert de chaleur dans un écoulement à l'intérieur ou à l'extérieur de tubes chauffés électriquement, on utilise d'habitude deux méthodes de mesure pour évaluer la température non mesurable T_w de la surface refroidie: ou bien, on mesure la température T_{is} de la surface non refroidie du tube à l'aide d'un thermocouple, ou bien, on évalue la température moyenne de la paroi T_m à l'aide de la mesure de la résistance électrique du tube. On montre, que le second procédé peut conduire à des erreurs à cause du principe de mesure, quand on veut effectuer des mesures locales. Le calcul de la différence de température ($T_{is} - T_w$) ou ($T_m - T_w$) a été fait en résolvant l'équation de la chaleur avec des sources de chaleur et en tenant compte de la variation des propriétés du matériau de la paroi en fonction de la température. On a trouvé que, dans la zone intéressante au point de vue technique, une solution simplifiée basée sur des coefficients moyens constants manifeste seulement des déviations faibles par rapport à la solution "exacte" (qui exige une IBM 7090).

L'utilité du procédé de mesure avec des thermocouples (T_{is}) et de la méthode de dépouillement est prouvée à l'aide des mesures effectuées sur des tubes de diverses formes et en divers matériaux dans lesquels s'écoule de l'eau, jusqu'à une densité de flux de chaleur de 450 W/cm². Dans la zone étudiée (20000 < Re < 640000, 2 < Pr < 5.5; 1 < Pr/Pr_w < 5) on a pu ramener l'influence des propriétés de l'eau dépendant de la température et de la densité du flux de chaleur sur le nombre de Nusselt à l'aide du facteur $(Pr/Pr_w)^{0.11}$.

Аннотация—Для определения локальных или средних коэффициентов теплообмена между текущей средой и нагреваемыми электрическим током стенками трубы пользуются обычно двумя способами измерений, чтобы установить температуру T_w охлаждаемых поверхностей, которую невозможно непосредственно измерить: или измеряется температура T_{is} необогреваемых частей стенок трубы с помощью термоэлементов или определяется средняя температура стенок трубы T_w по измеренному электрическому сопротивлению. Оказывается, что второй способ может привести к ошибкам при определении локальных коэффициентов теплообмена. Расчеты температурной разности ($T_{is} - T_w$) или ($T_m - T_w$) проводились путем решения уравнения теплопроводности с источником тепла и при условии, что физические константы стенок зависят от температуры. При этом оказывается, что в области, представляющей интерес для техники, упрощенное решение, которое исходит из постоянных средних физических констант, лишь незначительно отличается от «точного» решения, для которого нужна электронно-счетная машина IBM 7090.

Область применения измерительного метода с помощью термоэлементов (T_{is}) и расчетного метода в зависимости от геометрии труб и материала стенок может простираться до плотностей тепловых потоков, равных 450 ватт/см². В исследуемой области (20000 < Re < 640000, 2 < Pr < 5.5; 1 < Pr/Pr_w < 5) влияние физических констант воды, зависящих от температуры и плотности теплового потока, на число Нуссельта учитывалось фактором $(Pr/Pr_w)^{0.11}$.